Processus de sauts – Équilibre

Exercice 1

Donner un modèle markovien des systèmes ci-dessous et calculer leur matrice de sauts associée.

1. *File d'attente en tandem.*
   Des clients arrivent suivant un flot de Poisson d'intensité λ au guichet 1 puis, une fois servis passent au guichet 2. Au guichet $i = 1, 2$, un client reçoit un service de durée exponentielle de paramètre μ_i. Le service se fait dans l'ordre des arrivées. On note $L_i(t)$ le nombre de clients en attente au guichet i à l'instant t.
2. *File d'attente prioritaire.*
   Une station reçoit deux types de messages (ou clients), A et B, les messages de type A [resp. B] arrivent suivant un processus de Poisson d'intensité λ_A [resp. λ_B] et la durée de la connexion est distribuée exponentiellement de paramètre μ_A [resp. μ_B]. Les clients de type A sont prioritaires, un message de type B ne peut être servi que s'il n'y a aucun message de type A. Un client B en service est interrompu quand un client A se présente à la file d'attente (service préemptif). Les traitements se font dans l'ordre des arrivées, les messages sont stockés dans un file d'attente.

Exercice 2

La file d'attente $M/M/1$ avec service au hasard.
On suppose que les arrivées à une file d'attente à un serveur sont Poisson d'intensité λ et que les services sont exponentiels de paramètre μ. À la fin de chaque service, le serveur choisit au hasard parmi les clients présents celui qu'il sert ensuite. (SIRO dans la littérature anglo-saxonne, "Service In Random Order").

1. Si $(L(t))$ est le processus du nombre de clients de cette file d'attente, montrer que c'est un processus de Markov et calculer sa matrice de sauts.
2. Même question quand il y a deux classes $i = 1, 2$, de clients arrivant resp. au taux λ_i et requérant le service μ_i.

Exercice 3

Une colonie de bactéries se développe de la façon suivante : chaque bactérie se scinde en deux au bout d'un temps exponentiel de paramètre λ. Initialement il y a une bactérie et toutes les variables aléatoires sont supposées indépendantes. On note $X(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t ($X(0) = 1$).

1. Si $X_2(t)$ est le nombre de bactéries quand il y initialement deux bactéries, montrer que, pour $u \in [0, 1]$
$$\mathbb{E}\left(u^{X_2(t)}\right) = \left(\mathbb{E}\left(u^{X(t)}\right)\right)^2.$$

2. Si $\phi(t) = \mathbb{E}\left(X(t)\right)$, montrer que
$$\phi(t) = e^{-\lambda t} + 2\int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\phi(t-s)\, ds.$$
En déduire l'expression de $\phi(t)$.
3. Si on suppose que la durée de vie d'une bactérie a une distribution exponentielle de paramètre μ. Si $P_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$, montrer que pour $n \geq 1$,
$$\frac{d}{dt}P_n(t) = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t).$$

Exercice 4

Une pile est une file d'attente à un serveur et capacité infinie, où le serveur s'occupe exclusivement du dernier arrivé, quitte à abandonner un client en service. Il y a c classes de clients (les clients à l'intérieur d'une classe étant indiscernables). Pour $1 \leq i \leq c$, les clients de type i arrivent suivant un processus de Poisson de taux $\lambda_i > 0$ et requièrent une durée de service exponentielle de paramètre $\mu_i > 0$. Soit $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ et $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_c$.

1. Justifiez que l'on obtient le même processus (en loi) si l'on suppose que l'on reprend les services interrompus ou si l'on suppose que l'on doit recommencer le service en en tirant un nouveau.
2. Donnez un processus de Markov de sauts représentant la file d'attente, et son graphe. Explicitez sa matrice de sauts.
3. Montrez que le processus est ergodique si et seulement si $\rho < 1$ et trouvez sa distribution stationnaire. Déduisez-en la loi stationnaire du nombre de clients dans la file, et commentez.

Exercice 5

On considère $(N_\lambda(t))$ et $(N_\mu(t))$ deux Processus de Poisson indépendants d'intensité respectives λ et μ, on pose $X(t) = N_\lambda(t) - N_\mu(t)$. On suppose que $\lambda < \mu$.

1. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. $N_\lambda(t)/t$ converge vers λ.
2. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. le processus $(X(t))$ reste un temps fini dans les réels positifs.
3. Montrer que si
$$T = \inf\{s \geq 0 : X(s) = 1\}$$
alors $\delta \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{P}(T < +\infty) < 1$.
4. Montrer que la quantité δ vérifie la relation
$$\delta = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\delta^2 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$
5. En déduire la loi de la variable
$$W = \sup_{t\geq 0}(X(t)).$$