École Polytechnique
Cours de Majeure
Réseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilités.

Petite Classe n° 2
Le Mercredi 4 octobre 2006

Processus de Poisson – Modèles d'accès

Exercice 1

Automate de comptage.
Une chaîne infinie de 0 et de 1 est donnée par une suite (X_n) de v.a. i.i.d. avec $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 0) = 1 - p$.

On définit A_n comme le nombre d'occurrences du motif 010 dans la suite finie $X_1 \dots X_{10}$. Par exemple si $X_1 \dots X_{10} = 0010100101$, alors $A_n = 3$ les motifs commençant aux indices 2, 4 et 7

1. Montrer que la fréquence empirique asymptotique du motif, donnée par
$$\lim_{n\to\infty} A_n/n,$$
existe $\mathbb{P}$-p.s. et la calculer.
2. Donner un résultat analogue quand les occurrences de 010 sont *sans chevauchement*. Dans l'exemple précédent $A_n = 2$, le motif du milieu n'est pas compté (indices 2 et 7).

Exercice 2

On considère la chaîne de Markov (X_n) sur $\mathbb{N}$ de matrice
$$p(x, x+1) = p > 0\,, \quad p(x+1, x) = q = 1 - p > 0\,, \quad p(0,0) = q\,.$$
On pose $T = \inf\{\, n \geq 0 : X_n = 0 \,\}$ et $g_x(z) = \mathbb{E}_x(z^T)$ pour $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq z \leq 1$.

1. Donner une CNS pour qu'il y ait une loi invariante et la calculer.
2. Montrer que T est un temps d'arrêt, et que $g_x(z) = g_1(z)^x$.
3. Montrez que $g_0(z) = 1$ et $g_x(z) = pzg_{x+1}(z) + qzg_{x-1}(z)$. Déduisez-en
$$g_x(z) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pz}\right)^x .$$
4. Montrer que $\mathbb{P}_x(T < \infty) = \min\{1, (q/p)^x\}$ et que $\mathbb{E}_x(T) = x/(q-p)$ pour $p < q$ et $\mathbb{E}_x(T) = \infty$ pour $p \geq q$.

Exercice 3

Des demandes d'appel arrivent à un central téléphonique suivant un processus de Poisson d'intensité λ, les communications sont établies dès leur arrivée.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux appels arrivant simultanément ?
2. Si, les communications ont une durée de loi exponentielle de paramètre μ et qu'à à un instant donné il y a n communications en cours, quelle est la distribution du premier instant où l'une d'entre elles aura fini ?
3. On suppose que les durées de communications ne prennent que deux valeurs a et b ($a \leq b$) avec probabilité p et $1-p$ respectivement. Calculer la distribution de $L(t)$, le nombre de communications à l'instant t. Montrer que la variable $L(t)$ converge en distribution quand t tend vers l'infini.
4. Même question quand la distribution de la durée d'un appel est générale de même moyenne.

Exercice 4

Deux lignes de bus A et B desservent le même arrêt, les instants de passage à cet arrêt de chacune de ces lignes sont des processus de Poisson indépendants. La durée moyenne entre deux bus de la ligne A [resp. B] est d'une heure [resp. une demi-heure].

1. En arrivant au hasard à l'arrêt, quel est le temps d'attente moyen pour voir un bus de la ligne A ?
2. Quelle est la probabilité de voir passer trois bus en une heure ?
3. Quelle est la loi du nombre de bus de la ligne B que voit un passager de la ligne A en attendant son bus ?
4. Si lors d'une grève la moitié des bus sont indisponibles, quel est le temps d'attente moyen pour voir une bus ?

Exercice 5

Des groupes de requêtes arrivent à une unité de traitement suivant un processus de Poisson de paramètre λ. Le n-ième groupe comprend X_n requêtes, on suppose que la suite (X_n) est i.i.d. et indépendante du processus d'arrivée. On note $Y(t)$ le nombre total de requêtes arrivées jusqu'à l'instant t.

1. Quelle est la distribution de ces instants d'arrivées des groupes d'au moins 10 requêtes ?
2. Quelle est la proba qu'entre 0 et t il n'arrive aucun groupe de taille ≥ 10 et 1 seul de taille 1 ?
3. Calculer la transformée de Laplace de $Y(t)$, $\mathbb{E}[\exp(-\xi Y(t))]$ pour $\xi \geq 0$.
4. Montrer que le processus $(Y(t))$ possède la propriété des accroissements indépendants : pour s, $t \geq 0$ $(Y(t+s) - Y(s), t \geq 0)$ est indépendant des variables $(Y(u), u \leq s$ et de même loi que $(Y(t), t \geq 0)$. Le processus $(Y(t))$ *est un processus de Poisson composé.*