Programmation 1 – TP n° 6
Lambda-calcoul

La syntaxe du λ-calcoul est donnée par la grammaire suivante :

$$M ::= x \mid \lambda x.M \mid MN$$

où x est un variable. On abrège parfois $\lambda a.\lambda b.M$ en $\lambda ab.M$.
L'ensemble des variables libres $FV(M)$ d'un terme M est défini inductivement par :

$$FV(x) = \{x\} \qquad FV(M\ N) = FV(M) \cup FV(N) \qquad FV(\lambda x.M) = FV(M) - \{x\}$$

Un terme sans variable libre est dit *clos*.
La sémantique opérationnelle à petits pas du λ-calcoul est donné par les règles suivantes :

$$\frac{}{\lambda x.M\ N \to M[N/x]} \qquad \frac{M \to M'}{M\ N \to M'\ N} \qquad \frac{N \to N'}{M\ N \to M\ N'}$$

$$\frac{M \to M'}{\lambda x.M \to \lambda x.M'}$$

Une étape de réduction s'appelle une β-réduction. Une position dans un terme où l'on peut appliquer l'axiome de β-réduction est appelé un β-redex.

1 Entiers de Chourch

Kaz : je pense pas qu'il faille/faut plus detailler ici.
L'interprétation de Chourch d'un entier n est l'itération d'une fonction n fois :

$$[\![n]\!] = \lambda xf.f^n\ x$$

Q 1.1 Ecrire $[\![0]\!]$ et $[\![3]\!]$

Q 1.2 Ecrire les λ-termes interprétant le successeur, le predecesseur, l'addition, la multiplication et la fonction puissance.

2 Combinateurs de point fixe

Kaz : Cet exo est vraiment pas mal mais assez difficile. Il faut retrouver comment on fait les preuves.

Un λ-terme M est un *point-fixe* d'un lambda-terme F si $M =_\beta FM$. Un terme M est un *combinateur de point fixe* si pour tout terme F, MF est un point fixe de F.

On définit les termes suivants :

Kaz : Vérifier l'exercice.

$$p_f = \lambda x.f(x\,x) \qquad \mathbf{Y} = \lambda f.p_f\,p_f \qquad q = \lambda x.\lambda y.y\,(x\,x\,y) \qquad \mathbf{\Theta} = q\,q$$

Q 2.1 Montrer que $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{\Theta}$ sont des combinateurs de point fixe.

Q 2.2 Montrer qu'il existe $\mathbf{G}$ combinateur de point fixe tel que $(\mathbf{Y}\ \mathbf{G}) \to^* \mathbf{\Theta}$.

Q 2.3 Soit M un combinateur de point fixe. Montrer que $M =_\beta \lambda x.(x\,(M\,x))$.

Q 2.4 En déduire une caractérisation des combinateurs de point fixe en fonction de $\mathbf{G}$.

3 Paradoxe de Russell

Kaz : un exercice court de formulation du paradoxe de russel. ca prend 2 minutes.

Le paradoxe de Russell peut être énoncé comme l'existence d'un *ensemble qui contient tous les ensembles qui ne sont pas contenus dans eux mêmes*. On pose ainsi $R = \{S \mid S \notin S\}$

On peut écrire ce paradoxe "en λ-calcoul" en traduisant les ensembles et les éléments de ces ensembles en λ-termes : $e \in e'$ est représenté par le terme $(e'\ e)$. Un ensemble vu comme prédicat s'écrit donc sous la forme $\lambda x.e$. L'équivalence logique est interprétée par $=_\beta$.

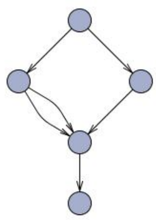
Soit $\mathbf{M}$ un combinateur représentant la négation logique et $\mathbf{R}$ le terme représentant R.

Q 3.1 Exhiber une contradiction avec le terme $\mathbf{R}$

4 Graphes de Réduction

Kaz : l'exo carotte donc.

Le *graphe de réduction* d'un λ-terme s'obtient en considérant l'ensemble de ses réduits (noeuds du (multi)graphe), et en mettant des arêtes pour chaque réduction possible. Par exemple, le graphe de $(I\ I)\ (I\ I)$ est le suivant :

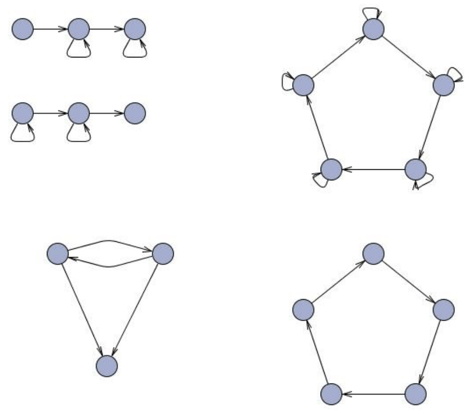


Q 4.1 Donnez les graphes de réduction des termes suivants. Etiqueter les graphes de réduction avec les termes adéquats.

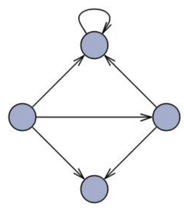
$$I\ x \qquad I\ (I\ x) \qquad I\ I\ (I\ I\ I) \qquad \Omega \qquad (\lambda x.\omega\ x)(\lambda x.\omega\ x) \qquad (\lambda x.x\ x\ x)(\lambda x.x\ x\ x)$$

$$(\lambda x.I)((\lambda x.x\ x\ x)(\lambda x.x\ x\ x))$$

Q 4.2 Donnez des λ-termes correspondant aux graphes suivants. (Même consigne)



Q 4.3 Que pouvez vous dire du graphe suivant.



5 Logique Combinatoire

Kaz : Peut etre un peu hors sujet mais ca peut servir. Daniel en avait mis a son partiel l'annee derniere

Les termes de la logique combinatoire, ou CL-termes, sont définis par la grammaire algébrique suivante :

$$M ::= x \mid MM \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{S}$$

où x est une variable.

La CL-réduction ($\rightarrow^{CL}$) est définie par :

$$\mathbf{S}xyz \rightarrow^{CL} xz(yz) \qquad\qquad \mathbf{K}xy \rightarrow^{CL} x$$

Un terme en forme CL-normale est un terme qu'on ne peut plus CL-réduire

Q 5.1 Donner l'interprétation $[\,]_\lambda$ des Cl-formules par les λ-termes. (Indice : facile)

Q 5.2 Donner l'interprétation $[\,]_{CL}$ des λ-termes par les CL-formules.
(Indice : moins facile. On pourra définir une fonction intermédiaire A_x vérifiant $[\text{‘}lx.M]_{CL} = A_x([M]_{CL})$)

Q 5.3 Montrer que **SK** est en forme CL-normale et que $[\mathbf{SK}]_\lambda$ n'est pas en forme β-normale.

Q 5.4 Soit $\omega = \mathbf{SII}$ et $P = \mathbf{S}(\mathbf{K}\omega)(\mathbf{K}\omega)$. Montrer que P est en forme CL-normale et que $[P]_\lambda$ n'a pas de forme β-normale.

Q 5.5 Montrer que $\lambda x.Ix \rightarrow^\beta I$ mais qu'il est impossible que $[\lambda x.Ix]_{CL} \rightarrow^{CL} [I]_{CL}$

Kaz : J'ai perdu les exos sur les strategies, mais c'est pas grave vu qu'on les fait la fois d'apres non ?

6 Indices de De Bruijn

Kaz : Je sais pas si c'est pertinent maintenant en tout cas c'est un peu drole et ils sont capables de comprendre

Des problèmes moraux sont posés par l'existence de variables dans les termes clos. Les indices de De Bruijn sont un moyen de se débarasser des variables Kaz : et d'accéder facilement à des substitutions explicites.

La syntaxe du lambda-calcoul en indice de De Bruijn est définie par la grammaire :

$$M ::= n \mid M\ M \mid \lambda.M$$

où n est un entier naturel. Intuitivement n représente la variable liée par le $(n+1)$-ème λ obtenu en remontant l'arborescence du terme.

Ainsi le λ-terme en indice de De Bruijn $\lambda\lambda.(1\,0)\ (\lambda.2\,0)$ interprète le λ-terme $\lambda xy.(x\ y)\ (\lambda z.x\ z)$

Q 6.1 Ecrire les règles décrivant la sémantique opérationnelle à petits pas du λ-calcoul en indice de De Bruijn.

Q 6.2 Ecrire **S**, **K** et **I** en indice de De Bruijn.

Q 6.3 Ecrire une interprétation des λ-termes en indices de De Bruijn.

Q 6.4 Ecrire l'interprétation duale