Introduction à la logique

Pierre Lescanne

26 janvier 2007 – 16 : 27

Modèle et démonstration

Métathéorie

Les ingrédients de la logique

Démonstrations

Une démonstration ou une preuve est un moyen de déduire des faits d'autres faits.
On se sert de règles de déduction et d'axiomes.

Modèles

Informellement, un modèle est une structure mathématique dans laquelle toutes les règles de déduction et les axiomes sont «satisfaits».

On dit qu'une formule est valide si elle est satisfaite dans tous les modèles.

Modèle et démonstration

Métathéorie

Les ingrédients de la logique

Les deux niveaux de la logique

En logique, il y a deux niveaux qui interfèrent et qu'il ne faut pas confondre.

Les deux niveaux de la logique

En logique, il y a deux niveaux qui interfèrent et qu'il ne faut pas confondre.

- La théorie, (on dit aussi parfois la théorie objet, si l'on veut être plus précis).
- La métathéorie, c'est une mathématique dans laquelle on va raisonner sur l'objet. C'est aussi un système logique !

Les deux niveaux de la logique

Le théorie objet est l'objet logique que l'on étudie et que l'on souhaite donc formaliser.

En général, on accepte dans la métathéorie toute la puissance du raisonnement traditionnel. Si elle est mécanisée, cela peut-être par un système formel plus ou moins puissant.

Les deux niveaux de la logique

Dans la métathéorie, on prouve des métathéorèmes, c-à-d des théorèmes à propos de la théorie objet.

Les deux niveaux de la logique

Dans la métathéorie, on prouve des métathéorèmes, c-à-d des théorèmes à propos de la théorie objet.

Quelques métathéorèmes courants sont :

- la correction,
- la cohérence,
- la complétude.

Les concepts métathéoriques

La correction est la capacité d'un système de preuve de pouvoir prouver seulement des théorèmes qui sont des formules valides.

Les concepts métathéoriques

La correction est la capacité d'un système de preuve de pouvoir prouver seulement des théorèmes qui sont des formules valides.

La cohérence est la capacité d'un système de preuve d'être absent de contradiction, on ne peut pas prouver une propriété et son contraire.

Les concepts métathéoriques

La correction est la capacité d'un système de preuve de pouvoir prouver seulement des théorèmes qui sont des formules valides.

La cohérence est la capacité d'un système de preuve d'être absent de contradiction, on ne peut pas prouver une propriété et son contraire.

La complétude est la capacité d'un système de preuve de pouvoir prouver toutes les formules valides.

La cohérence

Pour prouver la cohérence, autrement dit l'absence de contradiction,

on exhibe un modèle.

Modèle et démonstration

Métathéorie

Les ingrédients de la logique

Le langage

En logique on trouve :

- un langage d'expressions bien formées :
  - les propositions (construites avec des connecteurs),
  - les jugements ou séquents
  - etc.

  On dit aussi que c'est la syntaxe.
- des règles de déduction,
- des axiomes.

Les règles

Les règles de déduction montrent comment construire des théorèmes à partir d'autres théorèmes.

On définit dans la métathéorie,

- des fonctions des propositions vers les propositions (règles monadiques),
- ou des fonctions des couples de propositions vers les propositions (règles dyadiques).

Les propositions à partir desquelles ont fait la déduction dans la règle s'appelle les prémisses.

La proposition que l'on déduit s'appelle la conséquence.

Les axiomes

Les axiomes affirment que certaines propositions sont des théorèmes : on définit le prédicat unaire «être un théorème» dans la métathéorie et on affirme que les axiomes sont des formules qui satisfont ce prédicat.
N. B. Les axiomes sont en général vus comme des règles sans prémisses.

Le but des axiomes et des règles de déduction est de former des expressions particulières, les théorèmes en construisant des objets mathématiques particuliers les démonstrations (ou preuves).

Les preuves

Les preuves sont des arbres dont

- les noeuds sont les règles de déduction,
- les feuilles sont les axiomes
- et la racine est le théorème dont c'est la preuve.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots \qquad \cdots}{\cdots}\,(\mathit{foo}_1) \qquad \dfrac{\cdots}{\cdots}\,(\mathit{bar})}{\cdots}\,(\mathit{foo}_2) \qquad \cdots}{\Gamma \vdash \Delta}\,(\mathit{foo}_1)
$$

Les propositions

Il y a différentes sortes d'objets : propositions[1], théorèmes, etc.
Dans une logique, l'appartenance d'un objet à telle ou telle sorte se décrète par un jugement.

[1] qui ne sont pas théorèmes

Syntaxe concrète et syntaxe abstraite

Un ordinateur a besoin qu'on lui parle de la syntaxe à un bas niveau, c'est la syntaxe concrète, c-à-d les virgules, les parenthèses, les retours à la ligne, etc.

Un humain préfère une syntaxe lisible et flexible, il a besoin de la syntaxe abstraite, c-à-d plutôt la structure arborescente, donc il souhaite des opérateurs infixes, l'associativité.

Les modèles

Les aspects modèles
On interprète le langage dans les modèles. On parle aussi de sémantique.
Les propositions qui sont «satisfaites» (dans un sens à préciser) par le modèle sont dites valides.
Correction, cohérence et complétude établissent des liens entre

- les théorèmes (propositions prouvables)
- et les tautologies (propositions valides),

c'est-à-dire entre la prouvabilité et la validité.

Les deux grandes branches de la logique

La partie de la logique où l'on s'intéresse plutôt aux démonstrations s'appelle la la théorie de la démonstration ou théorie de la preuve (proof theory).
La partie de la logique où l'on s'intéresse plutôt à la validité s'appelle la théorie des modèles.

Bibliographie

Deux livres de base :

R. Lalement. Logique, Réduction, Résolution. Études et recherches en informatique. Masson, Paris, 1990.

R.David, K.Nour, C.Raffalli Introduction à la logique - théorie de la démonstration. Dunod, 2001.

Ma référence :

D. van Dalen. Logic and Structure. Springer Verlag, 1994.

Bibliographie (suite)

Un livre assez complet sur la logique de l'informatique en français :

P. Gochet, P. Gribomont. Logique. Volume 1 : méthodes pour l'informatique fondamentale. HERMES, 1990

Sur la logique épistémique :

R. Fagin, Y. Halpern, Y. Moses, and M. Y. Vardi. Reasoning about Knowledge The MIT Press, 1995.

Bibliographie (fin)

Sur la théorie des ensembles

Jean-Louis Krivine Théorie des ensembles. Eyrolles. (1998)

Page WEB :

http ://perso.ens-lyon.fr/pierre.lescanne/ENSEIGNEMENT/LOGIQUE/presentation.ht

ou formation.ens-lyon.fr, groupe cours_informatiques

Le plan du cours

- L'approche à la Hilbert (essentiellement axiomatique),
- La déduction naturelle (essentiellement à base de règles),
- La logique classique (une logique moins «calculatoire»),
- La récriture :
  - unification,
  - terminaison
  - complétion,
- Le lambda calcul («la théorie des fonctions»),
- Les modèles de la logique intuitionniste,
- La sémantique des langages de programmtion
  - sémantique opérationnelle,
  - sémantique dénotationnelle,
  - sémantique axiomatique.

Une progression plus didactique que linéaire ou «logique».