

# Introduction au lambda-calcul la confluence

Pierre Lescanne

*14 mars 2007 – 14: 06*

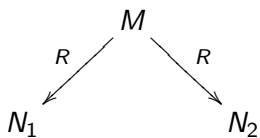
Qu'est-ce que la confluence ?

Lemme de substitution

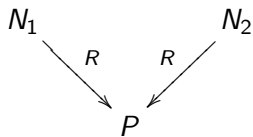
La réduction parallèle

La démonstration de la confluence

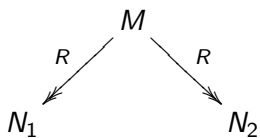
# Propriété du losange



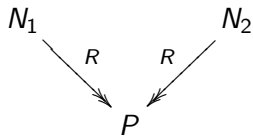
$\Rightarrow \exists P$



# Confluence

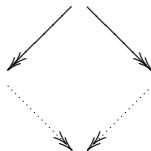


$\Rightarrow \exists P$



# Remarques

1.  $\xrightarrow{R}$  est confluyente si  $\xrightarrow{\Rightarrow R}$  a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :



où  $\cdots \Rightarrow$  est un flèche existentielle.

# Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser) :

$$\text{Si } R \text{ est } \text{confluente} \text{ alors}$$
$$M \overset{R}{\iff} N \iff \exists P (M \overset{R}{\longrightarrow} P \wedge N \overset{R}{\longrightarrow} P).$$

Si  $R$  est **confluente** alors  
 $M \overset{\leftarrow R}{\rightleftarrows} N \iff \exists P (M \overset{\rightarrow R}{\rightarrow} P \wedge N \overset{\rightarrow R}{\rightarrow} P)$ .

**Démonstration :**  $\leftarrow R$  est évident car  $\overset{\rightarrow R}{\rightarrow} \subseteq \overset{\leftarrow R}{\leftarrow}$  et  $\overset{\leftarrow R}{\leftarrow}$  est symétrique et transitive.

Si  $R$  est **confluente** alors

$$M \xleftrightarrow{R} N \iff \exists P (M \xrightarrow{R} P \wedge N \xrightarrow{R} P).$$

**Démonstration :**  $\implies$ . Par induction sur le nombre de « pics » dans  $M \xleftrightarrow{R} N$ . Soit

$$M \xleftarrow{R^+} M_1 \xrightarrow{R^+} N_1 \dots \xleftarrow{R^+} M_i \xrightarrow{R^+} N_1 \dots$$

$$\dots N_{n-1} \xleftarrow{R^+} M_n \xrightarrow{R^+} N_n \xleftarrow{R} N$$

► si  $n = 0$  alors  $M \xleftarrow{R} N$  ou  $M \xrightarrow{R} N$ .



Si  $R$  est **confluente** alors  
 $M \xleftrightarrow[R]{+} N \iff \exists P (M \xrightarrow[R]{+} P \wedge N \xrightarrow[R]{+} P)$ .

Démonstration :  $\implies$ .

► si  $n \neq 0$ , par confluence, dans

$$M \xleftrightarrow[R]{+} M_1 \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots N_{n-1} \xleftrightarrow[R]{+} M_n \xrightarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N \text{ il}$$

existe  $M'_n$  tel que  $N_{n-1} \xrightarrow[R]{+} M'_n \xleftarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N$

et

$$M \xleftrightarrow[R]{+} M_1 \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots \xleftarrow[R]{+} M_i \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots$$

$$\dots N_{n-1} \xrightarrow[R]{+} M'_n \xleftarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N$$

a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

# Confluence et convertibilité

**Corollaire :** Si  $R$  est confluent

1. Si  $N$  est une forme normale de  $M$  alors  $M \xrightarrow[R]{\gg} N$ .
2. Un terme a au plus une forme normale.

# Confluence de $\rightarrow_{\beta}$

Théorème :

$\xrightarrow{\beta}$	est
confluent	

# Remarques préliminaires

- ▶ Si  $\xrightarrow{R}$  a la propriété du losange, alors  $\xrightarrow{R}$  a la propriété du losange.
- ▶  $\xrightarrow{\beta}$  n'a pas la propriété du losange. Pourquoi?
- ▶ Il faut donc trouver une relation  $\xrightarrow{\parallel}$  telle que
  - $\xrightarrow{\parallel}$  a la propriété du losange,
  - $\xrightarrow{\parallel} = \xrightarrow{\beta}$  ,
    - + donc  $\xrightarrow{\beta}$  a la propriété du losange,
    - + ce qui signifie que  $\xrightarrow{\beta}$  est confluente.

Qu'est-ce que la confluence ?

Lemme de substitution

La réduction parrallèle

La démonstration de la confluence

## Lemme de substitution

Si  $x \notin FV(L)$  alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Si  $x \notin FV(L)$  alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration : Par induction sur la structure de  $M$ .

$M$  est une variable

- ▶  $M \equiv x$ , les deux côtés valent  $N[y := L]$ ,
- ▶  $M \equiv y$ , les deux côtés valent  $L$ ,
- ▶  $M \equiv z$ , les deux côtés valent  $z$ ,

Si  $x \notin FV(L)$  alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

**Démonstration :** Par induction sur la structure de  $M$ .  
 $M$  est une abstraction  $M \equiv \lambda z.M_1$ .

$$\begin{aligned} M[x := N][y := L] &\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) \quad (\text{par définition}) \\ &\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) \quad (\text{par induction}) \\ &\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] \quad (\text{par définition}) \end{aligned}$$

$M$  est une application facile.



Qu'est-ce que la confluence ?

Lemme de substitution

La réduction parallèle

La démonstration de la confluence

# Définition de la réduction parallèle

$$\text{(réflexivité)} \quad M \multimap M$$

$$\text{(APP-congruence)} \quad \frac{M \multimap M' \quad N \multimap N'}{MN \multimap M'N'}$$

$$\text{(ABS-congruence)} \quad \frac{M \multimap M'}{\lambda x.M \multimap \lambda x.M'}$$

$$\text{(\beta-parallèle)} \quad \frac{M \multimap M' \quad N \multimap N'}{(\lambda x.M)N \multimap M'[x := N']}$$

# Trois résultats

1. Si  $M \xrightarrow{\beta} M'$  alors  $M \dashrightarrow M'$

c'est-à-dire  $\xrightarrow{\beta} \subseteq \dashrightarrow$

2. Si  $M \dashrightarrow M'$  alors  $M \xrightarrow{\beta} M'$

c'est-à-dire  $\dashrightarrow \subseteq \xrightarrow{\beta}$

3. Si  $M \dashrightarrow M'$  et  $N \dashrightarrow N'$  alors

$$M[x := N] \dashrightarrow M'[x := N']$$

En exercice.

# Une propriété plus forte

On prouve une propriété **plus forte** (due à M. Takahashi)  
que la **propriété du losange** pour  $\dashv\vdash$  :

$$M \dashv\vdash N \implies N \dashv\vdash M^* \quad (*)$$

où  $M^*$  est un terme déterminé par  $M$  mais **indépendant** de  $N$ .

# Une propriété plus forte

On prouve une propriété **plus forte**  
que la **propriété du losange** pour  $\dashv\vdash$  :

$$M \dashv\vdash N \implies N \dashv\vdash M^* \quad (*)$$

où  $M^*$  est un terme déterminé par  $M$  mais **indépendant** de  $N$ .  
**Intuitivement**  $M^*$  est le terme obtenu à partir de  $M$  en contractant  
tous ses redex simultanément.

Qu'est-ce que la confluence ?

Lemme de substitution

La réduction parallèle

La démonstration de la confluence

## Le définition de $M^*$

1.  $x^* \equiv x$
2.  $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3.  $(M_1M_2)^* \equiv M_1^*M_2^*$  si  $M_1M_2$  n'est pas un redex.
4.  $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

# Exercices

## Calculer

1.  $((\lambda x.x) ((\lambda yz u.y (z u)) abc))^*$
2.  $((\lambda x.x x) (\lambda y.y y))^*$



$$M \dashrightarrow N \implies N \dashrightarrow M^*.$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition  $M^*$  sont laissés en exercice.

$$M \dashv\vdash N \implies N \dashv\vdash M^*.$$

Si  $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \dashv\vdash N$ , alors deux cas pour  $N$ ,

- ▶  $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- ▶  $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des  $N_i$  ( $i=1$  ou  $i=2$ ) tels que  $M_i \dashv\vdash N_i$ .

Par induction,  $N_i \dashv\vdash M_i^*$ .

Pour chaque cas :

- ▶ Si  $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$  alors  $N \dashv\vdash M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$ .
- ▶ Si  $N \equiv N_1[x := N_2]$ , alors nous avons  $N \dashv\vdash M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$ , par le résultat 3.

# Résumons

De la propriété (\*) pour  $\dashv\vdash\rightarrow$

on déduit la propriété du losange pour  $\dashv\vdash\rightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour  $\dashv\vdash\rightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour  $\xrightarrow{\beta}$

parce que  $\xrightarrow{\beta} = \dashv\vdash\rightarrow$  ,

qui est la confluence de  $\xrightarrow{\beta}$  .

Donc  $\xrightarrow{\beta}$  est confluent.

C.q.f.d.