Licence d'Informatique fondamentale

Corrigé de l'examen final de logique

2005-2006
dernière mise à jour: *26 janvier 2006 – 14 h 54*

Exercice 1

$$\dfrac{(\varphi \vee \psi) \vdash (\varphi \vee \psi) \qquad \dfrac{(\varphi \vee \psi), \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \vee \psi), \varphi \vdash (\psi \vee \varphi)}\vee I_d \qquad \dfrac{(\varphi \vee \psi), \psi \vdash \psi}{(\varphi \vee \psi), \psi \vdash (\psi \vee \varphi)}\vee I_g}{\dfrac{(\varphi \vee \psi) \vdash (\psi \vee \varphi)}{\vdash (\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)}\Rightarrow I}\vee E$$

Exercice 2

Rappelons les interprétations :

$\Rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	$\boxed{1}$	2
2	2	2	2

Il y avait une faute de frappe dans l'énoncé, signalée en cours d'examen. Le 1 *médian y était remplacé par un* 2.

1. Montrons les égalités suivantes.
   - $\llbracket p \Rightarrow q \Rightarrow p \rrbracket_2 = 2$ pour toute valeur de $\llbracket p \rrbracket_2$ et $\llbracket q \rrbracket_2$.
     En effet,
     – si $\llbracket p \rrbracket_2 = 0$ alors $\llbracket p \Rightarrow q \Rightarrow p \rrbracket_2 = 2$ (premi`ere ligne de la table de $\Rightarrow$),
     – si $\llbracket p \rrbracket_2 = 1$ alors $\llbracket q \Rightarrow p \rrbracket_2$ vaut 1 ou 2 (deuxi`eme colonne de la table de $\Rightarrow$) et clairement $\llbracket p \Rightarrow q \Rightarrow p \rrbracket_2 = 2$ (deuxi`eme ligne de la table de $\Rightarrow$),
     – si $\llbracket p \rrbracket_2 = 2$ alors $\llbracket q \Rightarrow p \rrbracket_2 = 2$ (derni`ere colonne de la table) et $\llbracket p \Rightarrow q \Rightarrow p \rrbracket_2 = 2$.
   - $\llbracket p \Rightarrow p \vee q \rrbracket_2 = 2$ pour toute valeur de $\llbracket p \rrbracket_2$ et $\llbracket q \rrbracket_2$.
     – si $\llbracket p \rrbracket_2 = 0$ alors $\llbracket p \Rightarrow p \vee q \rrbracket_2 = 2$ (examen de la premi`ere ligne de la table de $\Rightarrow$),
     – si $\llbracket p \rrbracket_2 = 1$ alors $\llbracket p \vee q \rrbracket_2$ vaut 1 ou 2 et clairement $\llbracket p \Rightarrow p \vee q \rrbracket_2 = 2$ (deuxi`eme ligne du tableau de $\Rightarrow$),
     – si $\llbracket p \rrbracket_2 = 2$ alors $\llbracket p \vee q \rrbracket_2 = 2$ et donc $\llbracket p \Rightarrow p \vee q \rrbracket_2 = 2$.
   - $\llbracket q \Rightarrow p \vee q \rrbracket_2 = 2$ pour toute valeur de $\llbracket p \rrbracket_2$ et $\llbracket q \rrbracket_2$. Cela provient du résultat précédent en remarquant que la table du $\vee$ est symétrique.
   - Pour la validation de **S** $= (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r$ éliminons d'abord quelques cas :
     – Si $\llbracket r \rrbracket_2 = 2$,
     – Si $\llbracket p \rrbracket_2 = 0$,
     – Si $\llbracket p \rrbracket_2 = 1$ et $\llbracket r \rrbracket_2 = 1$.

Il ne reste que neuf cas

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r$	**S**
1	0	0		0				2
1	1	0		0				2
1	2	0		0				2
2	0	0		0				2
2	1	0		0				2
2	2	0		0				2
2	0	1			0	1	2	2
2	1	1			1	1	2	2
2	2	1	1	1	2	1	1	2

- Pour $\mathbf{Or}_0 = (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \vee q \Rightarrow r$, on élimine $[\![r]\!]_2 = 2$ et $[\![r]\!]_2 = 0$ (car $[\![p \Rightarrow r]\!]_2 = 0$). Donc $[\![r]\!]_2 = 1$, si $[\![p]\!]_2 = 2$ alors $[\![p \vee q]\!]_2 = 1, 2$ donc $[\![p \vee q \Rightarrow r]\!]_2 = 2$. Symétriquement si $[\![q]\!]_2 = 2$. Reste donc
  – $[\![p]\!]_2 = 0$, $[\![q]\!]_2 = 0$ et $[\![r]\!]_2 = 1$ qui donne $[\![p \vee q \Rightarrow r]\!]_2 = 2$
  – et $[\![p]\!]_2 = [\![q]\!]_2 = [\![r]\!]_2 = 1$, qui donne $[\![p \vee q \Rightarrow r]\!]_2 = 2$ et donc $[\![(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \vee q \Rightarrow r]\!]_2 = 2$.
- $[\![(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)]\!]_2 = 2$ pour toute valeur de $[\![p]\!]_2$ et $[\![q]\!]_2$. Clairement l'interprétation de $\vee$ est le maximum. On voit que si on prend la table de $[\![p \Rightarrow q]\!]_2$ et si on prend le symétrique par rapport `a la diagonale principale (interversion de p et q) et si on superpose les deux tables pour en prendre le max, on obtient une table remplie de 2.

Pour le *modus ponens*, on voit que si par induction on a $\vdash r$ implique $[\![r]\!]_2 = 2$, pour toute preuve de $\vdash r$ plus petite que celle de $\vdash q$ et que si on suppose que pour prouver $\vdash q$ on a prouvé $\vdash p \Rightarrow q$ et $\vdash p$, alors on a $[\![p \Rightarrow q]\!]_2 = 2$ et $[\![p]\!]_2 = 2$, donc en examinant la table on voit qu'alors $[\![q]\!]_2 = 2$.

2. Considérons $[\![((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p]\!]_2$ pour $[\![p]\!]_2 = 1$ et $[\![q]\!]_2 = 0$, on a alors $[\![p \Rightarrow q]\!]_2 = 0$, donc $[\![(p \Rightarrow q) \Rightarrow p]\!]_2 = 2$ et $[\![((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p]\!]_2 = 1$.
3. Puisque $[\![((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p]\!]_2 \neq 2$, on en conclut que $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ n'est pas un théor`eme de la logique intuitionniste, ni de la logique intutionniste enrichie de $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$.
4. Cela revient `a considérer le mod`ele de Kripke avec deux mondes u_2 et u_1 avec $u_1 > u_2$. L'interprétation revient `a
   – $u_2 \Vdash \varphi$ si et seulement si $[\![\varphi]\!]_2 = 2$,
   – $u_1 \Vdash \varphi$ et $u_2 \nVdash \varphi$ si et seulement si $[\![\varphi]\!]_2 = 1$,
   – $u_2 \nVdash \varphi$ et $u_2 \nVdash \varphi$ si et seulement si $[\![\varphi]\!]_2 = 0$.

Exercice 3

1. On voit que $(\lambda xy.x)\,(\lambda z.z) \xrightarrow{\beta} \lambda xy.y$ et donc par le lemme de *réduction du sujet* les deux termes ont le même type.
2. Un type commun est $\alpha \to \alpha \to \alpha$, avec

$$\dfrac{\dfrac{x : \alpha, y : \alpha \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda y.x : \alpha \to \alpha}}{\vdash \lambda xy.x : \alpha \to \alpha \to \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{x : \alpha, y : \alpha \vdash y : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda y.y : \alpha \to \alpha}}{\vdash \lambda xy.y : \alpha \to \alpha \to \alpha}$$

3. $\Gamma \vdash \lambda x.xMN : (\sigma \to \sigma \to \alpha) \to \alpha$.
4. Le type commun est $\vdash [M, N] : (\sigma \to \sigma \to \sigma) \to \sigma$, $\quad \vdash \mathsf{T} : (\sigma \to \sigma \to \sigma)$ et $\quad \vdash \mathsf{F} : (\sigma \to \sigma \to \sigma)$.
5. On a $[M, N]\ \mathsf{T} = (\lambda x.xMN)\mathsf{T} \xrightarrow{\beta} \mathsf{T}MN = (\lambda xy.x)MN \xrightarrow{\beta} (\lambda y.M)N \xrightarrow{\beta} M$
   et $[M, N]\ \mathsf{F} = (\lambda x.xMN)\mathsf{F} \xrightarrow{\beta} \mathsf{T}MN = (\lambda xy.y)MN \xrightarrow{\beta} (\lambda y.y)N \xrightarrow{\beta} N$.

6. On a $\ulcorner 1 \urcorner \equiv [\mathsf{F}, \mathsf{I}] \equiv \lambda x.x(\lambda yz.z)(\lambda u.u)$. N.B. La réponse $\ulcorner 1 \urcorner \equiv [\mathsf{F}, \mathsf{I}]$ suffit.
   On a a $\ulcorner 4 \urcorner \equiv [\mathsf{F}, [\mathsf{F}, [\mathsf{F}, [\mathsf{F}, \mathsf{I}]]]]$.
7. S_2 est représentée par le terme $\lambda x.[\mathsf{F}, [\mathsf{F}, x]]$.
8. On voit que $(\lambda x.x\mathsf{F})[\mathsf{F}, x] \xrightarrow{\beta} [\mathsf{F}, x]\mathsf{F}$. Or d'apr`es la question 4, $[\mathsf{F}, x]\mathsf{F} \xrightarrow{\beta} x$.

   Donc $(\lambda x.x\mathsf{F})\ulcorner n+1 \urcorner \equiv (\lambda x.x\mathsf{F})[\mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner] \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ulcorner n \urcorner$. D'autre part, $(\lambda x.x\mathsf{F})\mathsf{I} \equiv (\lambda x.x\mathsf{F})\ulcorner 0 \urcorner \xrightarrow{\beta} \mathsf{IF} \xrightarrow{\beta} \mathsf{F}$. Par conséquent, $(\lambda x.x\mathsf{F})$ correspond `a la fonction $n+1 \mapsto n$ et indéfinie pour 0, c'est la fonction «prédécesseur».
9. On peut poser **Zero** $\equiv \lambda x.x\mathsf{T}$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} (\lambda x.x\mathsf{T})\ulcorner 0 \urcorner & \equiv & (\lambda x.x\mathsf{T})\mathsf{I} \xrightarrow{\beta} \mathsf{I\,T} \xrightarrow{\beta} \mathsf{T} \\ (\lambda x.x\mathsf{T})\ulcorner n+1 \urcorner & \equiv & (\lambda x.x\mathsf{T})[\mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner] \xrightarrow{\beta} [\mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner]\mathsf{T} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{F}. \end{array}$$