**MIM1 - Probabilités et applications- TD 5**
Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr

***Espérance***
**28 février 2005**

**Exercice 1 (Inégalité de Jensen)**

Soit $\Phi$ une fonction convexe définie sur un intervalle de R contenant toutes les valeurs d'une variable aléatoire discrète $X$ à valeurs dans R. Supposons que $X$ et $\Phi(X)$ sont intégrables.

1. Montrer que :
$$\Phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\Phi(X)]$$

**Exercice 2 (Approximation polynomiale de Bernstein)**

Soit $f$ une fonction continue de $[0;1]$ dans R. Le polynôme de Bernstein associé est défini par :
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$
Nous allons montrer la suite des $P_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[0;1]$

1. Pour chaque $x \in [0;1]$ on introduit une suite $(X_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $P(X_n = 1) = x$ et $P(X_n = 0) = 1 - x$. Donner la distribution de $S_n = X_1 + ... + X_n$. Calculer $\mathbb{E}[f(S_n/n)]$.
2. Borner $|P_n(x) - f(x)|$ en utilisant Tchebychev. Conclure.

**Exercice 3 (l'aiguille de Buffon)**

Une ligne rigide est jetée au hasard sur un réseau de droites parallèles équidistantes de $a$. Nous allons calculer le nombre moyen de points d'intersection de la ligne et du réseau.

Les lignes du réseau sont appelées $L_i$ où $i$ est un entier relatif. On suppose la courbe posée sur un plan dont $A$ et $B$ sont des points distincts. Pour poser la courbe ¡¡au hasard¿¿ sur le réseau on commence par poser $A$ entre $L_0$ et $L_1$ uniformément relativement à la distance à $L_0$ puis on choisit $\overrightarrow{AB}$ en choisissant au hasard de manière uniforme la valeur de l'angle qu'il fait avec les lignes.

1. Trouver une courbe qui a toujours le meme nombre de points d'intersection avec le réseau.

2. Montrer que le nombre moyen de points d'intersection d'une aiguille de longueur $l$ avec le réseau est proportionnel à $l$.
3. La courbe $C$ est approximée par une ligne brisée $P_n = M_0...M_n$ dont les sommets sont répartis uniformément sur la courbe. On note $N(C)$ (resp. $N(P_n)$) le nombre de points d'intersection de $C$ (resp. de $P_n$) avec le réseau. On suppose que $C$ est rectifiable et on admet que $\mathbb{E}[N(P_n)]$ tend vers $\mathbb{E}[N(C)]$. Calculer $\mathbb{E}[N(C)]$.

**Exercice 4 (Politique démographique)**

Correction de l'exercice du TD4.

**Exercice 5 (Recette non végétarienne et densité de probabilité)**

Le temps de cuisson $T$, en quarts d'heure, d'un filet de charolais est une variable aléatoire définie à partir d'une autre variable aléatoire $X$ dont la densité de probabilité vérifie :

$$f(t) = x + 1 \text{ si } |t| \leq k \quad f(t) = 0 \text{ si } |t| > k$$

1. Déterminer la constante $k$.
2. Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$.
3. $T$ est lié à $X$ par la relation $T = 1 + X^2$. Déterminer la densité de $g$ de $T$. Calculer $\mathbb{E}[T]$ et $\sigma(T)$.

**Exercice 6 (Loi de succession de Laplace)**

Correction de l'exercice du TD4.