**MIM1 - Probabilités et applications- TD 4**
Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr

***Distributions de probabilités discrètes***
**14 février 2005**

**Exercice 1 (Exemples de distributions)**
Soit $\mathcal{X}$ un ensemble dénombrable et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Une application $X$ de $\Omega$ dans $\mathcal{X}$ est une **variable aléatoire** si $\{X = x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Une fonction $p$ de $\mathcal{X}$ dans $[0; 1]$ est une **distribution de probabilité** si

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$$

La distribution de probabilité de la variable aléatoire $X$ est $p$ si pour tout $x \in \mathcal{X}$ on a $p(x) = P(X = x)$.

La variable aléatoire $X$ est un **vecteur de Bernouilli d'ordre $n$ et de paramètre $p$** si : $p \in [0; 1]$ et $X = (X_1, ..., X_n) \in \{0; 1\}^n$ a la distribution de probabilité $p(x) = p^{h(x)}(1-p)^{n-h(x)}$ où $h(x)$ est le poids de Hamming de $x$ :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Cela correspond à une suite de $n$ lancers indépendants d'une pièce.

Si $\mathcal{X} = \mathbf{N}$ alors $X$ est une **variable aléatoire de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si sa distribution de probabilité $p$ vérifie :

$$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \ (k \geq 0)$$

Si $\mathcal{X} = \{0; 1; \cdots; n\}$ la distribution définie par

$$p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ (0 \leq k \leq n)$$

où $p \in [0; 1]$ est la **distribution binomiale $B(n; p)$ d'ordre $n$ et de paramètre $p$.**

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathcal{X}$ et de distribution $p$ et soit une application $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathrm{R}}$. Si $f$ est à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}_+$ alors par définition $E[f(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)p(x)$. Si $f$ est à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ on définit $f^+(x) = max(0, f(x))$ et $f^-(x) = max(0, -f(x))$. On a $E[|f|] = E[f^+] + E[f^-]$. Si cette quantité est finie alors on dit que $f$ est intégrable. Si $E[f^+]$ et $E[f^-]$ ne sont pas tous les deux infinis alors on dit que $f$ est sommable et $E[f] = E[f^+] - E[f^-]$. Sinon $E[f]$ n'est pas définie et $f$ n'est ni sommable ni intégrable.

Si la variable aléatoire $X$ est intégrable alors sa moyenne est $m_X = E[X]$ et sa **variance** est $V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2$. Sa racine carrée positive $\sigma_X$ est appelée **écart-type** de $X$.

1. On considère la série harmonique alternée de terme général $u_n = (-1)^{n+1}/n$ ($n \geq 1$) et la fonction $\sigma$ de l'ensemble des entiers strictement positifs telle que $\sigma(3k+1) = 2k+1$, $\sigma(3k+2) = 4k+2$ et $\sigma(3k+3) = 4k+4$. Montrer que $\sigma$ est une permutation. Que peut-on dire des limites éventuelles des séries de terme général $u_n$ et $u_{\sigma(n)}$ ? Comment réarranger les termes pour obtenir une série divergente ? Soit $l$ un réel quelconque. Comment obtenir une série qui converge vers $l$ ?
2. Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire de Bernouilli et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Quelle est la loi de $S_n$ ?
3. Calculer la moyenne et la variance de la distribution de Poisson. Calculer la moyenne et la variance de la distribution binomiale d'ordre $n$ et de paramètre $p$.
4. Les chasseurs tuent en moyenne 5 vaches par an. Le nombre de ces vaches prises pour des lapins suit une loi de Poisson. Calculer la probabilité pour qu'il ne dépasse pas 7. Quelle est la probabilité d'avoir une année sans victime ?

**Exercice 2 (Convergence en loi et le théorème des événements rares de Poisson)**
On considère une masse donnée d'uranium 238 comprenant des milliards d'atomes ($n$) et on cherche à calculer la loi du nombre $Y$ de noyaux d'Hélium (rayonnement $\alpha$) émis pendant un certain laps de temps que l'on prend assez court. On peut alors supposer que chaque noyau émet indépendemment des autres et que pendant ce laps de temps soit il n'émet rien avec une probabilité $1 - p_n$ soit il émet un noyau avec la probabilité $p_n$.

1. Donner la loi et la moyenne de $Y = S_n$.
2. On observe $E[Y] = \lambda$. Montrer que $S_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson dont on donnera le paramètre.

**Définition :** Une suite $(Y_n)$ converge en loi vers la variable $Y$ si

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = P(Y \leq x)$$

pour tout point de continuité de la fonction $x \to P(Y \leq x)$. Dans le cas où les $Y_n$ et $Y$ ne prennent que des valeurs entières positives cela revient à dire que $lim_{n \to +\infty} P(Y_n = k) = P(Y = k)$ pour tout $k \geq 0$.

Remarque : Poisson s'est posé la question suivante : soit $Y$ une variable aléatoire dont on sait qu'elle est la somme d'un nombre $n$ très grand de variables aléatoires de Bernouilli i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées). La seule donnée expérimentale étant la moyenne $\lambda$ de $Y$, quel $n$ choisir ? Dans l'exemple précédent, pour éviter de faire ce choix, on fait l'approximation $n = +\infty$.

**Exercice 3 (Figaro)**
Figaro a deux coiffeuses, Rose et Marie. Le nombre de clientes de Rose et le nombre de clientes de Marie sont indépendants et suivent une loi de Poisson de moyennes respectives $\lambda$ et $\mu$.

1. Calculer le nombre moyen de clientes au total.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre total de clientes.
3. Sachant qu'il y a $n$ clientes calculer la probabilité pour que Rose en ait $k$.

**Exercice 4 (Politique démographique)**

A Bagdad la situation est grave. Le rusé Iznogoud, qui cumule les mandats de grand vizir et de ministre aux harems, est inquiet : il nait environ 105 garçons pour 100 filles et il est de plus en plus difficile de se constituer un harem. Il propose donc au khalife d'interdire aux familles d'avoir encore des enfants après la naissance de leur premier fils. Ainsi il y aura plus de filles que de garçons dans la plupart des familles. Que lui répond l'avisé khalife Hâroun al-Rachid ?

**Exercice 5 (Loi de succession de Laplace)**

On dispose de $(N+1)$ urnes numérotées de 0 à $N$. L'urne numéro $k$ contient $k$ boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro on en tire $n$ fois une boule avec remise après chaque tirage. Calculer la probabilité que le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage donne encore une boule rouge sachant qu'au cours des $n$ premiers tirages seules des boules rouges ont été tirées. Calculer la limite de cette probabilité quand $N$ tend vers $+\infty$.