MIM1 - Probabilités et applications- TD 3
Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr

σ-algèbres et variables aléatoires discrètes
7 février 2005

Remarque 1 *Les énoncés des TD sont mis en ligne au fur et à mesure sur http ://perso.ens-lyon.fr/emmanuelle.lebhar/TDprobas.html.*

Exercice 1 (σ-algèbres et mesures)

On considère un ensemble E, et T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, passage au complémentaire, et telle que $\emptyset \in T$.

1. Montrez que T est une σ-algèbre sur E.

On suppose maintenant que E est infini non dénombrable et pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = \infty$ sinon.

2. Est-ce une mesure ? (rappel : une *mesure* doit respecter deux conditions : $\emptyset$ est de mesure nulle, et l'additivité dénombrable. Pour les *mesures de probabilité*, on ajoute les condition d'être entre 0 et 1 et que E soit de mesure 1.)

Exercice 2 (Un modèle de transmission des caractères héréditaires)

Les gènes se présentent le plus souvent en paires et sous deux formes allèles A et a. Cela donne trois génotypes : AA, Aa et aa. Chaque individu reçoit au hasard un gène de chacun des génotypes de ses parents, chaque gène ayant la probabilité 1/2 de passer à l'enfant. Les génotypes des parents sont indépendants. On note p, q et r les probabilités qu'un adulte, dans une population donnée, ait les génotypes AA, Aa et aa.

1. Calculer les probabilités P, Q et R des génotypes dans la population suivante.
2. À quelles conditions sur les répartitions des génotypes ces proportions sont stables d'une génération à la suivante ? (théorème de Hardy Weinberg)

Exercice 3 (Variables aléatoires discrètes)

On fait une suite d'expériences identiques, indépendantes entre elles et à m issues possibles ($m \geq 1$) de probabilités respectives $p_1, \cdots, p_m$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). On appelle X le nombre d'essais nécessaires pour que chacun des m résultats soit obtenu au moins une fois. X est une *variable aléatoire discrète* : c'est une application de l'ensemble des possibles Ω dans une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout entier n la probabilité $P(X > n)$ est donnée par :
$$\sum_{i=1}^{m}(1-p_i)^n - \sum_{1\le i<j\le m}(1-p_i-p_j)^n + \cdots + (-1)^m \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{m-1}\le m}(1-p_{i_1}-\cdots-p_{i_{m-1}})^n + (-1)^{m+1}1_{n=0}$$
2. En déduire l'espérance $E(X)$ en utilisant $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.
3. Montrer que :
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} = C_m^1 - \frac{1}{2}C_m^2 + \cdots + (-1)^m\frac{1}{m-1}C_m^{m-1} + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}C_m^m$$
4. On suppose à présent tous les p_i égaux. Calculer l'espérance.
5. *Le problème du collecteur de coupons.* On suppose toujours que tous les p_i sont égaux. On appelle C_i le résultat de la $i^{ème}$ expérience. On dit que C_i est un succès si ce résultat n'avait pas encore été obtenu auparavant. En particulier C_1 et C_X sont toujours des succès.

   On divise la suite des C_i en époques : la $i^{ème}$ époque commence avec l'expérience qui suit le $i^{ème}$ succès et finit avec le $(i+1)^{ème}$ succès. On note X_i le nombre d'expérience de la $i^{ème}$ époque. On a : $X = \sum_{i=0}^{m-1} X_i$ Donner la loi de X_i (i.e. $\Pr\{X_i > k\}$). En déduire son espérance puis celle de X.

Exercice 4 (Le problème des menteurs)
La personne I_1 reçoit l'information 0 ou 1 et la transmet telle quelle avec le probabilité p, I_2 de même à I_3 et ainsi de suite jusqu'à I_n qui la transmet au monde entier. On suppose que les n personnes $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes. Quelle est la probabilité p_n que le monde reçoive la bonne information ? Calculer $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 5 (Indépendance)
Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p et dont la réunion soit l'espace Ω tout entier ?

Exercice 6 (Loi de succession de Laplace)
On dispose de $(N+1)$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numéro k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro on en tire n fois une boule avec remise après chaque tirage. Calculer la probabilité que le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage donne encore une boule rouge sachant qu'au cours des n premiers tirages seules des boules rouges ont été tirées. Calculer la limite de cette probabilité quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 7 (Relecture)
Une page contient 4 erreurs. À chaque relecture une faute non corrigée est corrigée avec la probabilité 1/3. Les relectures sont indépendants les unes des autres. Combien de relectures faut-il faire pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à 0,9 ?