Probabilités et applications, TD numéro 2
Emmanuelle Lebhar
lundi 31 janvier 2005

Définition
La probabilité de A sachant B est $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Question 1,1 : théorème de Bayes
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soit $E_1, \dots, E_n$ une partition finie de l'ensemble des événements Ω et soit $A \in \mathcal{A}$ tels que : $P(A) > 0$, $\forall i E_i \in \mathcal{A}$ et $P(E_i) > 0$. Montrer que pour tout i :

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i)P(A/E_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_k)P(A/E_k)}$$

Question 1,2
Un étudiant répond à une question où il y a à choisir entre m réponses dont une seule est la bonne. Soit p la probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la réponse sachant qu'il a répondu correctement ?

Question 2 : bon appétit

En Belgique on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football est composée de 7 Flamands et de 4 Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité pour qu'il soit flamand.

Question 3 : rendez-vous

Alice et Bob se donnent rendez-vous entre midi et 13 heures à la fontaine de l'ENS. Ils conviennent que la première personne arrivée attendra l'autre au plus 15 minutes. Décrivez l'ensemble des possibles de cette expérience. Déterminez la probabilité qu'Alice et Bob se rencontrent.

Question 4 : introduction à la mesure de probabilité

On considère les deux définitions suivantes, elles seront vues en cours plus en détail.

Définition
Une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω est une σ-algèbre (ou "tribu") si :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega - A \in \mathcal{F}$,
3. $\mathcal{F}$ est close par union dénombrable.

Définition
Une mesure de probabilité est une fonction P des parties de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait :

1. $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$,
2. $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \in [0, 1]$,
3. pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{F}$, $P(\bigcup A_n) = \sum_n^\infty P(A_n)$ si les A_n sont disjoints.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On note M une partie de Ω ayant la propriété suivante :

$$\forall C \in \mathcal{A}\ C \subset M \Rightarrow P(C) = 0\ et\ M \subset C \Rightarrow P(C) = 1$$

Montrer que M n'est pas dans $\mathcal{A}$.

On pose $\mathcal{A}_M = \{M \cap A, A \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $\mathcal{A}_M$ est une σ-algèbre sur M et que l'on définit sans ambiguité une probabilité P' sur cette algèbre en posant $P(A) = P'(M \cap A)$.

Question 5 : pub

Serge répartit les pages de publicité dans le Nouvel Observateur. Pour ne pas indisposer les lecteurs, il ne peut pas placer deux pages de publicité à la suite. Sachant qu'il doit placer k pages de publicité différentes dans une revue qui en compte n, calculer le nombre de manières de disposer la publicité.
On suppose que l'ordre des pages non publicitaires entre elles est fixé et que celui des pages publicitaires n'a aucune contrainte.

Question 6 : révisons nos classiques

Dans la classe de Cécile, il y a 23 élèves. Paul lui dit qu'il y a plus d'une chance sur deux que deux personnes soit nées le même jour. Il dit même que si la classe comptait 60 élèves, il y aurait plus de 99% de chance que cela arrive. Incrédule, Cécile cherche la probabilité d'un tel évènement pour une classe de n élèves, faites-en autant.