MIM1 - Probabilités et applications- TD 12

Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr

2-SAT, chaînes de Markov, et processus de branchement
9 mai 2005

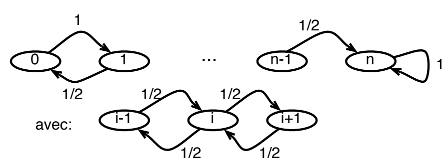
Exercice 1 (2-SAT et chaînes de Markov)

Problème 2-SAT : une instance I de 2-SAT est une conjonction de clauses booléennes, chaque clause étant une disjonction d'exactement 2 littéraux. On cherche une assignation de valeurs booléennes pour les n variables $x_1, \ldots, x_n$, qui satisfait toutes les clauses.

1. On part d'une assignation arbitraire des variables. Proposez un algorithme randomisé simple qui modifie cette assignation pas-à-pas jusqu'à obtenir une assignation qui satisfait l'instance, ou indique si l'instance n'est pas satisfiable.

Nous allons à présent évaluer l'espérance du temps de calcul de cet algorithme. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une assignation qui satisfait I. On dit qu'une variable x_i a une valeur correcte si $x_i = a_i$. Soit X_t la variable aléatoire du nombre de valeurs correctes à l'instant t.

2. Quelles valeurs peut prendre X_{t+1} sachant la valeur de X_t ?
3. Montrez que $\Pr\{X_{t+1} = X_t + 1\} \geq 1/2$.
4. On considère la chaîne de Markov à $n+1$ états $\{0, \ldots, n\}$ correspondant au diagramme de transition suivant :



Soit Y_t l'état de la chaîne de Markov à l'instant t. Montrez que, si $X_0 = Y_0$, alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\Pr\{X_t \geq k\} \geq \Pr\{Y_t \geq k\}$. On dit que la variable X_t *domine stochastiquement* la variable Y_t.

5. Quelle est la relation entre l'espérance du temps mis pour passer de l'état 0 à l'état n dans cette chaîne, et l'espérance du temps mis par l'algorithme pour trouver une assignation correcte ?
6. On note $f_{i,j}^{(t)}$ la probabilité que l'on arrive dans l'état j pour la première fois au temps t, sachant que l'on est parti de l'état i, pour la chaîne de Markov considérée. Donnez une relation de récurrence sur t pour $f_{i,j}^{(t)}$.
7. Donnez une relation de récurrence sur i pour l'espérance $h_{i,n}$ du temps mis pour atteindre l'état n de la chaîne, partant de l'état i. Quelles sont les conditions initiales ?
8. Déduisez une borne de l'espérance du temps de calcul de l'algorithme pour 2-SAT.

Exercice 2 (Chaîne de Markov homogène avec bruit blanc)
Soit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans un espace arbitraire F. Soit E un ensemble dénombrable et $f : E \times F \to E$ une fonction. Soit X_0 une variable aléatoire à valeur dans E indépendante des $\{Z_n\}_{n\geq 1}$. Montrer que la relation de récurrence suivante définit une chaine de Markov homogène :

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$$

Exercice 3 (Somme aléatoire de variables aléatoires i.i.d.)
Soit $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières et dont la fonction génératrice est g_Y. Soit T une variable aléatoire à valeurs entières indépendante des $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ et de fonction génératrice g_T.

1. Calculer la fonction génératrice de :

$$X = \sum_{n=1}^{T} Y_n$$

2. En déduire l'espérance de X en fonction de celles de T et des Y_n.

Exercice 4 (Graphe d'une fonction génératrice)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Soit $g : [0;1] \to \mathbf{R}$ un fonction définie par $g(x) = E[x^X]$.

1. Montrer que g est croissante et convexe. Montrer en outre que si $P(X = 0) < 1$ alors g est strictement croissante et si $P(X \leq 1) < 1$ alors g est strictement convexe.
2. Supposons $P(X \leq 1) < 1$. Montrer que si $E[X] \leq 1$ alors l'équation $g(x) = x$ a pour unique solution 1 dans $[0;1]$. Montrer que si $E[X] > 1$ alors l'équation a deux solutions dans $[0;1]$: $x = 1$ et $x = x_0 \in]0;1[$.

Exercice 5 (Cas général)
Soit $\{Z_n^{(j)}\}_{n\geq 1, j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières de foncttion génératrice g. Soit $Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, \dots)$ et X_n les variables définies par $X_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante :

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^k$$

1. Calculer la fonction génératrice du nombre X_n d'individus de la génération n et discuter de la probabilité d'extinction.
2. On suppose le nombre d'enfants mâles par homme dans la population française donné par la fonction génératrice suivante : $g_Z(x) = 0,3 + 0,5x + 0,18x^2 + 0,02x^3$ Quelle est la probabilité d'extinction d'un nom de famille issu d'un ancêtre commun ?