MIM1 - Probabilités et applications- TD 10
Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr

Borne de Chernoff, conception de circuits
18 avril 2005

Exercice 1 (Variante de Chernoff)

Une expression de la borne de Chernoff est, pour X somme de variable aléatoires de Benouilli indépendantes telle que $\mathbb{E}[X] = \mu$, on a pour tout $0 < \delta \leq 1$:

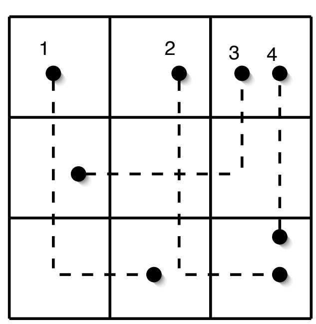
$$\Pr\{X < (1-\delta)\mu\} < e^{-\mu\delta^2/2}.$$

1. Montrez la variante suivante de la borne de Chernoff :

$$\Pr\{X > (1+\delta)\mu\} < \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu}.$$

Exercice 2 (Conception de circuits)

On considère un tableau de cellules logiques. On veut relier certaines paires de cellules par un fil. Un fil relie exactement 2 cellules et ne peut prendre qu'un virage. On a donc au plus 2 chemins possibles pour chaque fil (2 pour les liaisons comportant 1 virage, 1 pour les autres). Une contrainte physique sur les cellules impose que la frontière entre 2 cellules ne pourra pas être traversée par plus de w fils. On cherchera à partir de maintenant une tracé S qui minimise le nombre maximal de fils traversant une frontière. Si on pose $w_S(b)$ le nombre de fils traversant la frontière b. On veut donc minimiser $w = max_b w_S(b)$.



Dans l'exemple ci-dessus, il s'agit de relier 4 paires de cellules, il s'agit d'une solution valide si $w \geq 2$.

1. Ce problème d'optimisation est malheureusement NP-difficile, nous allons donc tenter d'approcher l'optimal w_{opt} le mieux possible. Introduisons les variables $x_{i,0}$ et $x_{i,1}$ pour chaque paire i à relier, avec : $x_{i,0} = 1$ si le fil i est horizontal au départ de son extrémité gauche, 0 sinon, et $x_{i,1} = 1 - x_{i,0}$.
   Exprimez $w_S(b)$ en fonction des $x_{i,0}$ et $x_{i,1}$ pour chaque fontière b.
2. Enoncez la totalité du programme linéaire. Pour le résoudre, nous allons relaxer les variables $x_{i,0}$ et $x_{i,1}$ dans $[0, 1]$, et obtenir une solution relaxée (donc détendue) $\hat{x}_{i,0}, \hat{x}_{i,1}$ donnant une valeur $\hat{w}$. Que peut-on dire de $\hat{w}$ par rapport à w_{opt} ?
3. Pour revenir à une solution valide, nous allons arrondir les $\hat{x}_{i,0}, \hat{x}_{i,1} \in [0, 1]$ en $\overline{x}_{i,0}, \overline{x}_{i,1} \in \{0, 1\}$ par la méthode de l'*arrondi aléatoire* : on met $\overline{x}_{i,0}$ (récip. $\overline{x}_{i,1}$) à 1 avec probabilité $\hat{x}_{i,0}$ (récip. $\hat{x}_{i,1}$), soit S la solution obtenue. Donnez une borne supérieure de $\mathbb{E}[w_S(b)]$.
4. Déduisez une borne supérieure sur la probabilité que $w_S(b)$ s'écarte d'un certain facteur de $\hat{w}$.
5. En déduire le facteur d'approximation assuré avec une certaine probabilité que vous préciserez.

Exercice 3 (2-colorier une famille de vecteurs)

Etant donnée une matrice A de taille $n \times n$ prenant ses valeurs dans $\{0, 1\}$, on cherche un vecteur colonne $X \in \{-1, +1\}$ qui minimise $||A.X||_\infty$.

1. Proposez un algorithme randomisé pour ce problème.
2. Quelle est l'espérance du produit d'une ligne de A avec X ?
3. Minorez la probabilité d'avoir un vecteur X satisfaisant $||A.X||_\infty \leq 4\sqrt{n \ln n}$