MIM1 - Probabilités et applications- Partiel

Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr

11 avril 2005

Les notes de cours et TD sont autorisées.Il est impératif de rédiger avec soin.

Exercice 1 (Répondeur)
Quand on téléphone entre 18 et 19 heures chez Pierre-Yves, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur. Il utilise cet interlocuteur électronique lorsqu'il est là deux fois sur trois pour ne pas répondre à des importuns. Lorsqu'il est absent, il l'utilise toujours.

1. Calculez la probabilité de téléphoner lorsqu'il est là.
2. On tombe sur le répondeur, calculez la probabilité qu'il soit présent.

Exercice 2 (Tarot)
Dans un jeu de tarot, on isole les 21 atouts numérotés de 1 à 21. On prend 3 atouts au hasard. Calculez la probabilité d'avoir :

1. Au moins un numéro multiple de 5.
2. Un multiple de 5 et un multiple de 3 exactement.
3. Le 1 ou le 21.

Exercice 3 (Ethernet)
Un certain nombre d'émetteurs sur un canal cherchent à transmettre des messages. Chaque émetteur a un compteur du nombre d'échecs de transmission qu'il a déjà subis. Afin d'éviter les collisions répétées, à chaque pas de temps, l'émetteur lance une pièce de monnaie biaisée : elle donne pile avec probabilité $1/2^x$ et face avec probabilité $1 - 1/2^x$, où x est la valeur du compteur à cet instant. L'émetteur ne tente d'envoyer son message que si la pièce tombe sur pile. Ainsi, plus on a subi d'échecs, moins on est autorisé à continuer d'émettre.
On se place dans le cas où le temps est discret et où l'émetteur ne subit *que des échecs* lorsqu'il essaye de transmettre. On note $b(t)$ l'état du compteur d'un émetteur donné à l'instant t :

$$b(0) = 0$$
$$\Pr\{b(t) = x + 1 | b(t-1) = x\} = \frac{1}{2^x}$$
$$\Pr\{b(t) = x | b(t-1) = x\} = 1 - \frac{1}{2^x}$$

1. Montrez que $\mathbb{E}[2^{b(t)}] = t + 1$.
2. En déduire $\mathbb{E}[b(t)] \leq \log_2 t + 1$.
3. Montrez que $\mathbb{E}[b(t+1) - b(t)] = \mathbb{E}[\frac{1}{2^{b(t)}}]$.
4. {Question bonus} En déduire $t \leq \sum_{k=0}^{t-1} 2^{\mathbb{E}[b(k)]}\mathbb{E}[b(k+1) - b(k)] \leq 2^{\mathbb{E}[b(t)]}/\ln 2$.
5. En admettant (éventuellement) les réponses des questions précédentes, donnez un encadrement de $\mathbb{E}[b(t)]$.

Pour la petite histoire : à l'aide de résultats de convergence en loi plus poussés, on peut montrer que le nombre de sources ayant un compteur qui vaut k suit une loi de Poisson de paramètre λ, et montrer que si $\lambda > \log 2$, seul un nombre fini de messages sont transmis.

Exercice 4 (Dés)

On considère le jet de deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, indépendants et bien équilibrés, un dé blanc et un dé noir. Soit X la variable aléatoire représentant le numéro de la face supérieure du dé blanc, Y la variable aléatoire représentant le numéro de la face supérieure du dé noir.

1. Quelle est la loi de probabilité du couple (X, Y) ?
2. On lance les deux dés jusqu'à ce qu'ils donnent le même résultat. Le nombre de lancers qu'il faut pour atteindre ce résultat est une variable aléatoire Z. Quelle est la loi de probabilité de Z ?
3. Quelle est son espérance mathématique ?

Exercice 5 (k-coupes)

Considérons la généralisation suivante du problème de la coupe maximum.

Problème MAX k-CUT : Étant donnés un graphe non-orienté $G = (V, E)$ muni d'une fonction de coût positive ω sur les arêtes, et un entier k, trouver une partition de V en k sous-ensembles $S_1, \ldots, S_k$ tels que le coût total des arêtes entre ces ensembles soit maximal.
On considère l'algorithme randomisé suivant pour ce problème : pour tout sommet u, choisir un ensemble S_i aléatoirement uniformément et mettre u dedans.
On se propose de chercher le *facteur d'approximation* de cet algorithme, c'est-à-dire de trouver le facteur α tel que la moyenne du poids de la coupe calculé par cet algorithme soit supérieure à α fois le poids optimal (maximal) sur cette instance.

1. Une arête e contribue pour un poids 0 dans le poids de la coupe si elle n'y est pas, quel est le poids moyen d'une arête ?
2. En déduire le poids moyen d'une coupe calculée par cet algorithme sur une instance donnée.
3. Donnez le facteur d'approximation de l'algorithme.