Probabilités et applications, TD numéro 3
Natacha Portier
mercredi 21 février 2001

Question 1

Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p et dont la réunion soit l'espace Ω tout entier ?

Question 2

Une page contient 4 erreurs. À chaque relecture une faute non corrigée est corrigée avec la probabilité $1/3$. Les relectures sont indépendants les unes des autres. Combien de relectures faut-il faire pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à 0,9 ?

Question 3 : un modèle de transmission des caractères héréditaires

Les gènes se présentent le plus souvent en paires et sous deux formes allèles A et a. Cela donne trois génotypes : AA, Aa et aa. Chaque individu reçoit au hasard un gène de chacun des génotypes de ses parents, chaque gène ayant la probabilité $1/2$ de passer à l'enfant. Les génotypes des parents sont indépendants. On note p, q et r les probabilités qu'un adulte, dans une population donnée, ait les génotypes AA, Aa et aa.

Question 3,1

Calculer les probabilités P, Q et R des génotypes dans la population suivante.

Question 3,2

Montrer que $Q^2 = 4PR$.

Question 3,3 : le théorème de Hardy Weinberg

À quelles conditions sur les répartitions des génotypes ces proportions sont stables d'une génération à la suivante ?

Question 4 : la corde de Bertrand

On trace une corde ¡¡au hasard¿¿ sur un cercle. Dans tous les cas suivants, calculez la probabilité pour que la longueur de la corde soit supérieure au coté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.
1) Soit O le centre du cercle et H la projection de O sur la corde. choisit un rayon R du cercle et on choisit H ¡¡au hasard¿¿ sur R.

2) Soit (ABC) un triangle équilatéral inscrit dans le cercle. On choisit A' ¡¡au hasard¿¿ sur le cercle et on considère la corde AA'.
3) Le point H est tiré ¡¡au hasard¿¿ sur le disque.

Qu'en déduisez-vous ?

Question 5 : le problème des menteurs

La personne I_1 reçoit l'information 0 ou 1 et la transmet telle quelle avec le probabilité p, I_2 de même à I_3 et ainsi de suite jusqu'à I_n qui la transmet au monde entier. On suppose que les n personnes $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes. Quelle est la probabilité p_n que le monde reçoive la bonne information ? Calculer $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Question 6

Bruno et Émilie jouent avec deux dés. Bruno gagnera s'il fait 7 et Émilie si elle fait 6. Bruno commence la partie puis ils jouent chacun leur tour jusqu'à ce qu'un des deux gagne. Quelle est la probabilité de succès de chacun des joueurs ? Cette partie risque t'elle de se prolonger indéfiniment ?

Question 7 : loi de succession de Laplace

On dispose de $(N+1)$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numéro k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro on en tire n fois une boule avec remise après chaque tirage. Calculer la probabilité que le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage donne encore une boule rouge sachant qu'au cours des n premiers tirages seules des boules rouges ont été tirées. Calculer la limite de cette probabilité quand N tend vers $+\infty$.

Question 8

On cherche un parapluie qui se trouve dans l'un quelconque des 7 étages d'un immeuble avec la probabilité $p/7$. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ? Représenter cette probabilité en fonction de p.

Question 9

Anatole doit expédier 2 objets dans un pays où un paquet sur 10 n'arrive jamais à destination. Les objets valent respectivement 1000F et 1500F. Il hésite : faut-il envoyer un paquet ou les deux paquets séparément ? Soient X et Y les valeurs des envois arrivés à bon port par chacune des deux méthodes. Déterminez les espérances mathématiques de ces deux variables aléatoires. Que peut-on en conclure ? Généralisez le problème à n objets de valeurs $x_1, ..., x_n$: comparez un envoi groupé à n envois séparés et indépendants.