Probabilités et applications, TD numéro 2
Natacha Portier
vendrdi 9 février 2001

Définition

La probabilité de A sachant B est $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Question 1,1 : théorème de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soit $E_1, \ldots, E_n$ une partition finie de l'ensemble des événements Ω et soit $A \in \mathcal{A}$ tels que : $P(A) > 0$, $\forall i E_i \in \mathcal{A}$ et $P(E_i) > 0$. Montrer que pour tout i :

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i)P(A/E_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_k)P(A/E_k)}$$

Question 1,2

Un étudiant répond à une question où il y a à choisir entre m réponses dont une seule est la bonne. Soit p la probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la réponse sachant qu'il a répondu correctement ?

Question 1,3 : retour à Saint-Troupaize

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques :
- la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100
- une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

La probabilité d'erreur de chacune des sources est la même qu'il fasse beau ou qu'il pleuve et les deux sources de prévision sont indépendantes.

La météo annonce la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. déterminer le temps le plus probable.

Question 2

On fait une suite d'expériences identiques, indépendantes entre elles et à m issues possibles ($m \geq 1$) de probabilités respectives $p_1, \cdots, p_m$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). On appelle X le nombre d'essais nécessaires pour que chacun des m résultats soit obtenu au moins une fois.

Question 2,1

Montrer que pour tout entier n la probabilité $P(X > n)$ est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{m}(1-p_i)^n - \sum_{1\leq i<j\leq m}(1-p_i-p_j)^n + \cdots \\ + (-1)^m \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{m-1}\leq m}(1-p_{i_1}-\cdots-p_{i_{m-1}})^n + (-1)^{m+1}1_{n=0}$$

Question 2,2

En déduire $E(X)$ en utilisant $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.

Question 2,3

Montrer que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} = C_m^1 - \frac{1}{2}C_m^2 + \cdots + (-1)^m\frac{1}{m-1}C_m^{m-1} + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}C_m^m$$

Question 2,4

Dans le cas où les p_i sont tous égaux calculer l'espérance en utilisant l'égalité précédente.

Question 2,5

On suppose toujours que tous les p_i sont égaux. On appelle C_i le résultat de la $i^{ème}$ expérience. On dit que C_i est un succès si ce résultat n'avait pas encore été obtenu auparavant. En particulier C_1 et C_X sont toujours des succès.

On divise la suite des C_i en époques : la $i^{ème}$ époque commence avec l'expérience qui suit le $i^{ème}$ succès et finit avec le $(i+1)^{ème}$ succès. On note X_i le nombre d'expérience de la $i^{ème}$ époque. On a :

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$$

.

Donner la loi de X_i. En déduire son espérance puis celle de X.

Question 3

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent chacune l'héritier de leur duché. Montrer que les évènements suivants sont indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble.
A={l'héritier d'Aquitaine est un garçon}
B={l'héritier de Bourgogne est un garçon}
C={les duchés vont pouvoir faire alliance en mariant les enfants attendus}