DEA Sémantique, preuves et programmation
Preuves constructives
Examen
Lundi 6 Janvier 1997
Durée 2h.
Tous documents autorisés.

On appelle $\mathcal{CS}$ le calcul des séquents propositionnel minimal sans coupures

$$\frac{}{A \vdash A}\text{ axiome}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\text{ affaiblissement}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\text{ contraction}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\text{ permutation}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow\text{-droite}$$

et $\mathcal{DN}$ déduction naturelle propositionnelle minimale

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\text{ axiome} \quad \text{si } A \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow\text{-élim}$$

1 Donner une démonstration dans le système $\mathcal{CS}$ de la proposition

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

2 Traduire cette démonstration dans le système $\mathcal{DN}$.
3 Donner un terme-preuve dans le λ-calcul simplement typé associé à cette démonstration.

Soit la démonstration dans le système $\mathcal{CS}$

$$\frac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma, B \vdash C}}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow\text{-gauche}$$

Soit π_1' (resp. π_2') la traduction de π_1 (resp. π_2) dans dans le système $\mathcal{DN}$, et u (resp. v) le terme-preuve associé à π_1' (resp. π_2').
4 Quels sont les types des termes u et v ? Dans quels contextes sont-ils typés ?

5 Donner une démonstration dans le système $\mathcal{DN}$ du séquent $\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C$. Quel est le terme-preuve associé à cette démonstration ?
6 Donnez un algorithme de traduction des preuves du système $\mathcal{CS}$ dans le λ-calcul simplement typé.
7 Montrer que si a et b sont deux λ-termes normaux, et x et y sont deux variables, alors le terme $a[x \leftarrow (y\ b)]$ est normal.
8 Montrer que les démonstrations du système $\mathcal{CS}$ se traduisent en des termes-preuves normaux.

On ajoute au système $\mathcal{CS}$ les deux règles

$$\frac{\Gamma, A[x \leftarrow t] \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B}\ \forall\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\ A}\ \forall\text{-droite} \quad \text{si } x \text{ n'apparaît pas dans } \Gamma$$

et de même les règles suivantes au système $\mathcal{DN}$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\ A}\ \forall\text{-intro} \quad \text{si } x \text{ n'apparaît pas dans } \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ A}{\Gamma \vdash A[x \leftarrow t]}\ \forall\text{-élim}$$

9 Quel est le λ-calcul adéquat pour exprimer les démonstrations de ce fragment de la logique du premier ordre ?
10 Étendre la traduction de la question 6 pour ce fragment du calcul des séquents.