DEA de Programmation
Preuves Constructives
Corrigé

6 décembre 2002

1 Martin-Löf et système T

(a) C'est dans le poly...

(b)

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(t\ 10) & \rhd^* & 2 \\ \pi_1(\pi_1(t\ 10)) & \rhd^* & 5. \end{array}$$

2 Système T

$$f \equiv \lambda n : \mathrm{nat}.(R_{\mathrm{nat}*\mathrm{nat}}\ <0,0>\ \lambda p.\lambda r. <\pi_2(r), S(\pi_1(r))>).$$

L'invariant est $(f\ n) =< n/2, (n+1/2)>$.

3 Imprédicativité

(a) $(M\ a\ b)$ signifie qu'il exists i tel que :$b = a + 2i$.
(b)$M \equiv \lambda n : \mathrm{nat}.\lambda x : \mathrm{nat}.\Pi P : \mathrm{nat} \to \mathrm{Type}.(P\ n) \to (\Pi y : \mathrm{nat}.(P\ y) \to (P\ (S\ (S\ y))))$.
qui est de type $\mathrm{nat} \to \mathrm{nat} \to \mathrm{Type}$.

(c) Le truc est que si $b = a+2i$, alors une preuve de $(M\ a\ b)$ va itérer i fois. donc ici, $(t\ \lambda z : \mathrm{nat}.\mathrm{nat}\ O\ \lambda a : \mathrm{nat}.\lambda r : \mathrm{nat}.(S\ r)) \rhd_\beta^* 4$.

4 Déduction Modulo

(a) Pour l'instant, aucune proposition n'est niable. Sont prouvables :
$R(3,3)$: oui, se réduit vers 0=0
$R(3,4)$ non
$\neg R(3,4)$ non plus. Pour l'instant on ne sait pas nier de $R(x,y)$.
$\forall x.R(x,x)$ oui, par récurrence sur x.
$\neg\forall x.\forall y R(x,y)$ et $\forall x.\neg R(S(x),x)$ ne sont pas prouvables.

(b) On alors aussi prouver les deux dernières propositions.

(c) $R(x, y)$ signifie alors exactement "x est inférieur ou égal à y". On sait alors prouver $R(3, 4)$ et donc nier $\neg R(3, 4)$.

Pour transposer cette definition dans la théorie de Martin-Löf, le plus jolie est de construire la fonction de soustraction et de traduire $R(x, y)$ par $x - y = 0$.

(d) On peut bien sûr prouver $\forall x.\forall y.\exists z.z = f(x, y)$, il suffit de choisir $z \equiv f(x, y)$. Par contre on ne sait rien sur la valeur de $f(0, 0)$.

(e) La théorie est cohérente. On peut par exemple traduire dans Martin-Löf (seule la dernière règle de réduction est remplacée par un lemme d'egalité).