Modélisation des Systèmes Complexes

cours de Michel Morvan
transcrit par ses étudiants:

Benjamin Lévêque, David Baelde, David Roger

Florent Becker, Florent Bouchez, Guillaume Burel

Jean-Baptiste Rouquier, Samuel Mimram

Stéphane Gimenez, Sylvain Périfel, Thomas Gazagnaire

janvier – mai 2003

Version provisoire non relue par Michel Morvan. Les passages mis en forme de cette façon peuvent être sautés dans une première lecture. Dans une première lecture seulement !

Les résultats admis ont pour la plupart été vus en TD.

OpenContent License Version 1.0, July 14, 1998.
The original version of this document may be found at http ://opencontent.org/opl.shtml

LICENSE

Terms and Conditions for Copying, Distributing, and Modifying

Items other than copying, distributing, and modifying the Content with which this license was distributed (such as using, etc.) are outside the scope of this license.

1. You may copy and distribute exact replicas of the OpenContent (OC) as you receive it, in any medium, provided that you conspicuously and appropriately publish on each copy an appropriate copyright notice and disclaimer of warranty ; keep intact all the notices that refer to this License and to the absence of any warranty ; and give any other recipients of the OC a copy of this License along with the OC. You may at your option charge a fee for the media and/or handling involved in creating a unique copy of the OC for use offline, you may at your option offer instructional support for the OC in exchange for a fee, or you may at your option offer warranty in exchange for a fee. You may not charge a fee for the OC itself. You may not charge a fee for the sole service of providing access to and/or use of the OC via a network (e.g. the Internet), whether it be via the world wide web, FTP, or any other method.

2. You may modify your copy or copies of the OpenContent or any portion of it, thus forming works based on the Content, and distribute such modifications or work under the terms of Section 1 above, provided that you also meet all of these conditions :

a- You must cause the modified content to carry prominent notices stating that you changed it, the exact nature and content of the changes, and the date of any change.

b- You must cause any work that you distribute or publish, that in whole or in part contains or is derived from the OC or any part thereof, to be licensed as a whole at no charge to all third parties under the terms of this License, unless otherwise permitted under applicable Fair Use law.

These requirements apply to the modified work as a whole. If identifiable sections of that work are not derived from the OC, and can be reasonably considered independent and separate works in themselves, then this License, and its terms, do not apply to those sections when you distribute them as separate works. But when you distribute the same sections as part of a whole which is a work based on the OC, the distribution of the whole must be on the terms of this License, whose permissions for other licensees extend to the entire whole, and thus to each and every part regardless of who wrote it. Exceptions are made to this requirement to release modified works free of charge under this license only in compliance with Fair Use law where applicable.

3. You are not required to accept this License, since you have not signed it. However, nothing else grants you permission to copy, distribute or modify the OC. These actions are prohibited by law if you do not accept this License. Therefore, by distributing or translating the OC, or by deriving works herefrom, you indicate your acceptance of this License to do so, and all its terms and conditions for copying, distributing or translating the OC.

NO WARRANTY

4. Because the opencontent (oc) is licensed free of charge, there is no warranty for the oc, to the extent permitted by applicable law. Except when otherwise stated in writing the copyright holders and/or other parties provide the oc "as is" without warranty of any kind, either expressed or implied, including, but not limited to, the implied warranties of merchantability and fitness for a particular purpose. The entire risk of use of the oc is with you. Should the oc prove faulty, inaccurate, or otherwise unacceptable you assume the cost of all necessary repair or correction.

5. In no event unless required by applicable law or agreed to in writing will any copyright holder, or any other party who may mirror and/or redistribute the oc as permitted above, be liable to you for damages, including any general, special, incidental or conse-

quential damages arising out of the use or inability to use the oc, even if such holder or other party has been advised of the possibility of such damages.

Table des matières

Préliminaires

Chacun sait que plus les préliminaires sont longs, plus le plaisir est grand. . .

0.1 Faire de la recherche

Les questions fondamentales sont simples, elles visent à une compréhension d'un phénomène général. Si l'on travaille sur les zonotopes à poils ras triphasés, c'est parce que l'on ne sait rien dire sur les zonotopes en général. Il est d'ailleurs tentant de ne publier que sur un domaine suffisamment spécialisé pour que l'on soit le seul à le comprendre (les zonotopes à poils ras triphasés par exemple), d'avoir un joli CV avec beaucoup de publications, et finalement de ne pas avoir fait grand chose dans sa carrière.

quelques questions à se poser

Pourquoi travailler sur ce problème ? Pourquoi la société me paye-t-elle pour faire ce que je fais ?

Et dans son domaine de recherche :

type de questions	fondamentales	appliquées	
type de réponses	théorie	expérimentation	simulation

Il n'y a pas de cloisonnement : des questions appliquées peuvent recevoir des réponses théoriques par exemple. Attention à ne pas rester dans un type de réponse. Attention aussi à ne pas se contenter de maitriser beaucoup d'outils.

Il est difficile de se poser le bon problème, de trouver une question ni trop facile, ni surtout trop dure à résoudre.

0.2 L'informatique

Y compris parmi les scientifiques, les gens savent peu ce qu'est la recherche en l'informatique. Quelles questions se posent les informaticiens ? Quelles réponses sont attendues ? Qu'appellent-ils un résultat ? Il y a beaucoup d'idées fausses.

ce que ce n'est pas

Il y eu à la fin des années 90 un grand débat en banlieue sud de Paris pour savoir si l'informatique devait être enseignée aux élèves militaires de l'école comme une science, sinon elle n'était qu'un outil. Après de vrais débats, on décida que oui.

Un autre exemple est celui d'un informaticien qui s'adresse à un membre de la direction :

– C'est dommage, il n'y a jamais eu d'informaticien au sein de l'équipe présidentielle.
– Oui, tout à fait. D'ailleurs mon PC ne marche pas très bien.

Avec un brin de provocation, de même que l'on ne va pas chercher un spécialiste de la mécanique des fluides pour déboucher les toilettes, faire de l'informatique en tant que chercheur ne consiste pas à réparer les ordinateurs.

ce que c'est

Les questions que l'on se pose en informatique étaient déjà posées avant l'arrivée de la technologie, dès le début du XX$^{\text{e}}$ siècle environ. Quelles–sont elles ?

Prenons un exemple. Je vous donne un cercle, une règle et un compas, et je vous demande de tracer un carré qui ait la même aire. C'est une vieille question bien connue : la quadrature du cercle. Fondamentalement, il y a une donnée de base (le cercle), des opération élémentaires (tracer une intersection, une droite, etc.) et une question : que peut-on calculer ?

Bien plus tard, au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, des mathématiciens se sont demandé, pour les figures que l'on peut construire, combien d'opérations étaient nécessaires. L'autre question des mêmes mathématiciens fut de savoir combien d'espace était nécessaire pour construire les points auxiliaires.

Les premiers ordinateurs sont arrivés avec des opérations élémentaires (qui sont aujourd'hui effectuées de plus en plus rapidement). Ces trois questions déjà posées sont devenues très pertinentes :

– Qu'est ce que je peux calculer (c'est calculabilité) ?
– Combien d'opérations sont nécessaires (c'est la complexité en temps) ?
– Quel est la place nécessaire (c'est la complexité en espace) ?

On ne parlera pas ici des travaux de la première moitié du XX$^{\text{e}}$siècle (Turing, Gödel, et d'autres).

La technologie ne fait que modifier les objets et les opérations élémentaires sur ces objets. Par exemple, la perspective des ordinateurs quantiques propose des possibilités de calcul nouvelles (assez surprenantes d'ailleurs), mais ces trois questions fondamentales restent les mêmes.

la recherche en mathématique ou en informatique théorique

Il y a eu de nouveaux théorèmes de géométrie dans les années 1990 car (grâce aux ordinateurs) des mathématiciens ont pu *voir* les surfaces sur lesquelles ils travaillaient.

Il n'existe pas de méthode générale pour trouver une démonstration. Mais de plus en plus souvent, cela passe par des simulations, des essais afin de voir ce qui se passe et se faire une intuition.

On trouve parfois un théorème par chance, on l'écrit différemment de la façon dont on l'a trouvé. On met longtemps à le trouver, et une fois rédigé il semble souvent d'une banalité affligeante car démontrable en dix minutes.

On comprend mieux le sens d'un résultat en ayant transpiré dessus ; si vous allez faire de la recherche, essayez de rester émerveillé, de garder en tête que ce ne sont pas des choses évidentes. Certains entendent le mot "résultat" par "quelque chose qui donne une nouvelle façon de voir, de comprendre l'objet sur lequel on travaille".

0.3 La modélisation des systèmes complexes

Un système complexe est un ensemble d'objets qui interagissent avec des règles d'interaction locales. Définition très générale… Le point fascinant est qu'avec des règles d'interactions très simples, on peut voir émerger des comportement globaux très complexes.

Il y a de nombreuses approches possibles : on parlera par exemple de système dynamique ou d'objet combinatoire en mathématiques, de calcul en informatique, de physique statistique.

À propos de la physique statistique, lorsque qu'elle un gaz, elle établit certes la façon dont deux atomes interagissent et décrit le comportement du gaz. Mais elle cherche à décrire le comportement du système lorsque le nombre d'objets tend vers l'infini. Ici nous nous intéressons à des grands nombres d'objets, jusqu'à quelques centaines de milliers, mais toujours en nombre fini.

Dans beaucoup de disciplines on a cherché à comprendre précisément ce qui se passe localement. En physique par exemple on peut décrire de façon très pointue le contact entre les atomes de deux surfaces. Mais personne ne sait expliquer l'apparition d'un coefficient de frottement à partir de ces règles locales. Ce type de question se retrouve dans la plupart des champs scientifiques : on connaît les règles locales, on ne sait pas en déduire le comportement global.

La modélisation des systèmes complexes est un domaine interdisciplinaire, en plein développement.

Chapitre 1

Automates Cellulaires

1.1 Découvrons les automates cellulaires

1.1.1 premier contact

plein de concepts

DÉFINITIONS

Un ***automate cellulaire*** est un 4-uplet (d, S, H, δ) où :

- $d \in \mathbb{N}^*$ est la ***dimension*** ;
- S est un ensemble fini dont les éléments sont les d'***états*** ;
- $H \subset \mathbb{Z}^d$ est un ensemble fini appelé ***voisinage***, dont les éléments v_j sont les ***vecteurs de voisinage*** :
  $H = \{v_j = (x_{1,j}, \ldots, x_{d,j}) \mid j \in 1..|H|\}$;
- $\delta : S^{|H|} \to S$ est la ***fonction de transition***.

Un élément de $\mathbb{Z}^d$ est appelé ***cellule***. Si A est un automate cellulaire, une ***configuration*** de A est une application $C_A : \mathbb{Z}^d \to S$ (c'est l'état de chaque cellule). C_A se transforme sous l'action de l'automate en une configuration C'_A définie par
$\forall z \in \mathbb{Z}^d \qquad C'_A(z) = \delta\left(C_A(z + v_1, \ldots z + v_{|H|})\right)$ On note cette évolution $C_A \vdash C'_A$ et on l'appelle ***fonction globale*** de A, notée Δ_A.

Partant d'une configuration initiale C_A^0, on s'intéresse en général à la suite infinie de configurations $(C_A^t)_{t\in\mathbb{N}}$ où $(C_A^t) \vdash (C_A^{t+1})$.

Notation : $C_A^t(z_1, \ldots, z_d) = \langle (z_1, \ldots, z_d), t\rangle_A$.

$(C_A^t)_{t\in\mathbb{N}}$ est appelée l'***orbite*** de C_A^0 (pour les mathématiciens), le ***calcul*** sur C_A^0 (pour les informaticiens) ou le ***mouvement*** de C_A^0 (pour les physiciens).

S'il existe un état $s_q \in S$ tel que $\delta(s_q, \ldots, s_q) = s_q$ cet état est dit ***quiescent*** (directement adapté de l'anglais, littérallement «passif», «tranquille»). S'il en existe plusieurs on en choisit un qui sera le seul appelé quiescent. S'il existe un état quiescent s_q, le ***support*** d'une configuration

C_A^0 est $\{z \mid C_A^0(z) \neq s_q\}$. Une ***configuration finie*** est une configuration à support fini. (C'est comme sur une machine de Turing où il n'y a qu'un nombre fini de cases ne contenant pas le symbole blanc.)

Quelques hypothèses pour simplifier

- La fonction δ pourrait être différente pour chaque cellule, donc éventuellement non récursive. En pratique, elle est la même pour toutes les cellules (comme dans la définition). On la décrit par un automate fini d'ensemble d'états S et d'alphabet $S^{|H|}$.
- L'évolution est :
  - synchrone, c'est à dire que tous ces automates font un pas de calcul en même temps ;
  - discrète dans le temps ;
  - locale car le nouvel état d'un automate ne dépend que de celui de ses voisins (définis par H) ;
  - déterministe ;
  - uniforme car toutes les cellules ont le même automate (on peut se ramener à ce cas même si on considère un automate cellulaire où le nombre d'automates différents entre ses cellules est infini).
- On supose généralement que $(0, \ldots, 0) \in H$.

Remarque En toute généralité on pourrait travailler sur n'importe quel graphe infini sommet-transitif.

G est sommet-transitif si et seulement si
$\forall x, y \in V(G) \quad \exists \varphi$ automorphisme $\quad \varphi(x) = y$, c'est à dire que tous les sommets jouent le même rôle. ($\varphi : G \to H$ est un isomorphisme de graphes si et seulement si $ab \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in E(H)$).

le cadre de travail

Cela a déjà été dit mais mérite d'être souligné.
- uniformité,
- localité,
- espace, temps et ensemble d'états discrets (chacun d'eux pourrait être continu),
- synchronisme (ce qui suppose un temps discret).

1.1.2 Propriétés des voisinages

Définition (Quelques voisinages particuliers)
- voisinage de Von Neumann : $H_{VN} = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \|x\|_1 \leqslant 1\}$,
- voisinage de Moore : $H_M = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \|x\|_\infty \leqslant 1\}$.

On rappelle que $\begin{cases} \|(x_1, \ldots, x_d)\|_1 &= \sum_{i=1}^d |x_i| \\ \|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty &= \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|. \end{cases}$

Les automates définis sur ces voisinages sont dits ***de plus proche voisinage***. On peut étendre ces voisinages à un rayon r quelconque au lieu de 1.

On peut se restreindre à $r = 1$

(Si on accepte un automate plus lent) :

Proposition 1.1 *Soit $A = (d, S, H, \delta)$ un automate cellulaire. Alors il existe un automate cellulaire $A^\star = (d^\star, S^\star, H_f, \delta^\star)$, avec H_f de plus proche voisinage, tel que $S \subseteq S^\star$ et*

$$\exists k_H \in \mathbb{N}, \quad \forall C_A^0 = C_{A^\star}^0, \quad \forall t \in \mathbb{N}, \qquad C_A^t = C_{A^\star}^{k_H t}$$

k_H est uniquement déterminé par H.

Démonstration en TD.

On peut imposer l'existence d'un état quiescent

(Si on ne regarde pas toutes les étapes de l'automate) :

Proposition 1.2 *Soit $A = (d, S, H, \delta)$ un automate cellulaire. Alors il existe un état s_q de S et un entier k_A tels qu'il existe un automate cellulaire $A^\star = (d, S, H^\star, \delta^\star)$ vérifiant $H \subseteq H^\star$, S_q quiescent et*

$$\forall C_A^0 = C_{A^\star}^0, \quad \forall t \in \mathbb{N}, \qquad C_A^{k_A t} = C_{A^\star}^t$$

Démonstration en TD.

1.1.3 Représentation de Wolfram

C'est la représentation d'une fonction de transition δ par le mot composé des images des $|S|^{|H|}$ entrées possibles de δ. On énumère ces entrées dans l'ordre lexicographique des $v_j \in H$.

Par exemple, $54 = 2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^5$ représente la fonction de transition :

Voisinage	000	001	010	011	100	101	110	111
Nouvel état	0	1	1	0	1	1	0	0

La fonction de transition associée au nombre 110 permet de coder une machine de Turing universelle. 110 est dit universel.

1.1.4 Propriétés des configurations

DÉFINITIONS

Soient s_q un état quiescent pour un automate cellulaire A et C une configuration. Le ***support*** de C est :

$$sup(C) := \left\{ z \in \mathbb{Z}^d \mid C(z) \neq s_q \right\}$$

Une ***configuration finie*** est une configuration dont le support est fini (presque tous les états sont quiescents). (S'il existe plusieurs états quiescents, l'un d'entre eux est choisi pour la définition d'une configuration finie). Ceci est utile pour parler de reconnaissance de langage.

Une configuration sans antécédent est appelée ***jardin d'Eden***.

Une configuration C est ***espace-périodique*** si et seulement si $\exists p \in \mathbb{Z}^d, \quad \forall z \in \mathbb{Z}, \qquad C(z+p) = C(z)$.

Une configuration C est ***temps-périodique*** si et seulement si $\exists (p, t_0) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \qquad \Delta_A^{t_0+t+p}(C) = \Delta_A^{t_0+t}(C)$

Remarques

- Si C est espace-périodique, alors elle est temps-périodique. La réciproque est fausse.
- Si C est d'espace-période p alors $\Delta_A(C)$ est temps-périodique de période plus petite ou égale à $|S|^p$.
- En dehors de la configuration partout quiescente, toutes les configurations espaces-périodiques sont infinies.

1.1.5 Questions de décidabilité

puissance Turing

Théorème 1.3 Une machine de Turing d'alphabet Σ et d'états Q peut être simulée par un automate cellulaire de dimension 1 ayant $\Sigma \times (Q \cup \{\star\})$ comme ensemble d'états et $\{-1, 0, 1\}$ comme voisinage.

Réciproquement, tout automate cellulaire sur des configurations finies peut être simulé par une machine de Turing.

<u>Preuve</u> (esquisse de la simulation par automate cellulaire)

Considérons la configuration

B	B	a_1	$\cdots$	a_n	$\cdots$	B	B

d'une machine de Turing dans l'état q dont la tête pointe sur la case a_n. On la simule par la configuration suivante d'un automate cellulaire :

B	B	a_1	$\cdots$	a_n	$\cdots$	B	B
$\star$	$\star$	$\star$	$\cdots$	q	$\cdots$	$\star$	$\star$

La fonction de transition va modifier la configuration uniquement à l'endroit où il n'y a pas de «$\star$» et dans son voisinage, simulant ainsi le déplacement de la tête de lecture et le changement d'état de la machine de Turing.

■

théorème de l'arrêt

Théorème 1.4 Soit $A = (d, H, S, \delta)$ un automate cellulaire et $s \subseteq S$. Alors il est indécidable de savoir si, étant donné une configuration finie C, s apparaît dans l'évolution de C.

Preuve

Il suffit de prouver le résultat pour $d = 1$. Soit A un automate cellulaire simulant une machine de Turing universelle M_u. Soit $F = \Sigma \times Q_f$.

Partant d'une configuration initiale correspondant au codage d'une machine de Turing φ_i quelconque et de son état initial x, un état de F apparaît dans l'évolution de A si et seulement si M_u s'arrête, c'est à dire si et seulement si φ_i s'arrête sur x.

Cela signifie que la machine de Turing simulant A peut résoudre le problème de l'arrêt, ce qui est une contradiction.

■

tout n'est pas indécidable

Proposition 1.5 *(Jacques Mazoyer, Véronique Terrier)*
Soit $A = (1, S, \{-1, 0, 1\}, \delta)$ un automate cellulaire admettant un état quiescent s_q. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $s \in S$.

Il est décidable de savoir si lors de l'évolution d'une configuration finie, un état de s apparaîtra sur la diagonale $d_k := \{\langle t, k+t \rangle_A \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Preuve

On procède par récurrence sur k, pour prouver que chaque diagonale de l'automate cellulaire admet une période. Soit β la longueur de la configuration initiale.

initialisation Pour $k \leqslant -\beta + 1$, l'état de la cellule que l'on calcule dépend uniquement de l'état d'une cellule (les 2 autres sont dans l'état quiescent). Le nombre d'état étant fini, on va retomber sur un état déjà vu, d'où la périodicité.

	état à calculer	
s_i	s_q	s_q

hérédité l'état de la cellule que l'on calcule dépend d'une cellule s_i, dont on sait juste que l'état est dans l'ensemble fini S, et de deux cellules s_1 et s_2, dont l'état est périodique (de périodes respectives p_1 et p_2). Il y a au plus $p_1p_2|S|$ triplets possibles, d'où la périodicité.

	état à calculer	
s_i	s_1	s_2

Ainsi, on se limite à chercher dans un ensemble fini (les éléments de la période) si un état de S apparaît.

■

Remarque Considérons dans C_A^t le mot $m_{k,t}$ qui commence sur d_k et se termine au «bord» de la configuration, c'est à dire en z tel que
$\forall i \in \mathbb{N}, C_A^t(z+i) = s_q$ (toutes les cellules suivantes sont dans l'état quiescent). $m_{k,t}$ est de longueur $k+\beta$ au maximum et détermine entièrement $m_{k,t+1}$. La suite $(m_{k,t})_{t\in\mathbb{N}}$ est donc périodique et la période Π_k de d_k vérifie $\Pi_k \leqslant |S|^{k+\beta}$.

interprétation philosophique d'un élève

Dans le cas général, on ne peut pas prévoir si, en un point donné de l'univers, il passera un jour une particule ; et ce même en connaissant les coordonnées et vitesses exactes de toutes les particules de l'univers. En revanche, le destin d'une particule est parfaitement connu.

1.1.6 3 questions face à un système dynamique

- La complexité augmente-t-elle ? (On introduit pour cela la notion d'entropie).
- Quelle est la sensibilité aux conditions initiales ? (Cette fois c'est la notion de chaos).
- Quelle est la sensibilité aux variations de la topologie, aux perturbations locales ou du synchronisme ? Si elle est faible on parle de robustesse ou de stabilité structurelle.

1.2 Gros théorèmes

Avant de présenter le théorème de Richardson, faisons...

1.2.1 quelques rappels de topologie

la base

Définitions (Notions de topologie)
Soient X un ensemble et $f : X \to X$ une application (partout définie).

- Une ***topologie*** $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sur X est un ensemble de parties de X contenant $\emptyset$, X et stable par union quelconque et par intersection finie :
  - $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,
  - $\forall A$, $(\forall \alpha \in A, O_\alpha \in \mathcal{T}) \Rightarrow \cup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{T}$,
  - $\forall I$, $(|I| < \infty$ et $\forall i \in I, O_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow \cap_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$;

  les éléments de $\mathcal{T}$ sont les ***ouverts*** de la topologie ;
- les complémentaires des ouverts sont appelés ***fermés*** ;
- un ***compact*** K de X est une partie de X telle que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini :
$$(\forall \alpha \in A, \quad O_\alpha \text{ ouvert et } K \subseteq \cup_{\alpha \in A} O_\alpha) \qquad \Rightarrow$$
$$(\exists I \subseteq A, \quad |I| < \infty \text{ et } K \subseteq \cup_{i \in I} O_i)$$
- f définie partout est ***continue*** si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert : $\forall O \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$; c'est équivalent à dire que l'image réciproque de tout fermé est fermée.

ce que nous allons utiliser

Exemple Sur un ensemble fini S, on appelle ***topologie discrète*** la topologie $\mathcal{P}(S)$. Toute partie de S est ouverte et fermée. On appelle alors ***topologie produit*** sur le produit dénombrable $S^{\mathbb{Z}^d}$ la topologie dont les ouverts sont définis comme suit : O est un ouvert de $S^{\mathbb{Z}^d}$ si et seulement si O est une union dénombrable d'intersections finies d'ensembles de la forme $O_{z,s} = \left\{ c \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid c(z) = s \right\}$. Ce sont des unions d'ensembles de configurations pour lequelles un ensemble fini de points est fixé.

Une petite proposition utile dont la démonstration est immédiate :

Proposition 1.6 *Un fermé dans un compact est lui-même compact.*

Preuve

D'un recouvrement du fermé on déduit un recouvrement du compact en ajoutant le complémentaire du fermé, puis on extrait un sous-recouvrement fini.

■

ça c'est plus un rappel

Pour finir, précisons le théorème de Tychonoff (la démonstration dans le cas général utilise l'axiome du choix, mais pas celle dans le cas où A est dénombrable, qui nous suffira).

Théorème 1.7 (TYCHONOFF) Soient $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques compacts. Alors le produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ muni de la topologie produit est compact.

Admis.

1.2.2 la topologie adaptée ici

Dans toute la suite, $S^{\mathbb{Z}^d}$ est muni de la topologie produit exposée ci-dessus.

DÉFINITIONS

On appelle ***motif*** une fonction partielle de $\mathbb{Z}^d$ vers S dont le domaine est fini. Choisir un motif, c'est fixer un nombre fini de points d'une configuration.

On appelle ***ouvert de base*** associé à un motif p l'ensemble des configurations conïcidant avec p sur son domaine : $O_p = \left\{c \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid c_{|\,\mathrm{dom}(p)} = p\right\}$. Ce sont les intersections finies de $O_{z,s}$: $O_p = \cap_{z\in \mathrm{dom}(p)} O_{z,p(z)}$. Ainsi, les O_p sont ouverts. De plus, ils sont fermés, car leur complémentaire est ouvert : ${}^C O_p = \left\{c \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid \exists z \in \mathrm{dom}(p),\ c(z) \neq p(z)\right\} = \cup_{z\in\mathrm{dom}(p)} \cup_{s\neq p(z)} O_{z,s}$. Par définition des O_p, tout ouvert U de $S^{\mathbb{Z}^d}$ peut s'écrire comme union d'ouverts de base.

On peut voir les fonctions de transition des automates cellulaires comme les applications allant de l'ensemble des motifs ayant pour domaine H vers S. On appelle ***représentation par motifs*** de δ l'application φ qui à chaque état $s \in S$ associe l'ensemble des motifs de domaine H dont s est l'image par δ : $\varphi(s) = \{p \text{ motif } \mid \mathrm{dom}(p) = H \text{ et } \delta(p) = s\} = \{p_{s,i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m_s\}$. Si une configuration contient le motif $p_{s,i}$, alors l'image par δ de la cellule $(0, \ldots, 0)$ est s.

Pour calculer l'image d'une autre cellule, il suffit de translater cette cellule en $(0, \ldots, 0)$, de calculer la transition, puis de translater dans l'autre sens. Les anglophones appellent ***shift*** cette fonction de translation.

Soit d est une distance sur $\mathbb{Z}^d$, par exemple $d((z_1, \ldots, z_d), (z'_1, \ldots, z'_d)) = \max\{|z_i - z'_i|\}$. On munit $S^{\mathbb{Z}^d}$ de la distance $l(c, c') = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } c = c' \\ 2^{-m} & \text{sinon} \end{array} \right.$ où $m = \min_{z\in\mathbb{Z}^d}\{d(z, 0), c(z) \neq c'(z)\}$. On vérifie aisément que l est une distance (définie, positive, inégalité triangulaire).

Dans la suite on notera $\| z \|$ au lieu de $d(z, 0)$ pour plus de légèreté, mais il n'est pas nécessaire de disposer d'une norme (une distance suffit).

Proposition 1.8 *$(S^{\mathbb{Z}^d}, l)$ est un espace métrique compact.*

Preuve

C'est principalement l'application du théorème de Tychonoff. Il suffit de montrer que la topologie de la distance l (celle des boules ouvertes) est la même que la topologie produit, puis que l'espace est compact pour la topologie produit.

- Les ouverts de la topologie produit sont bien ouverts pour la topologie de l, car $O_{z,s} = \cup_{c \in O_{z,s}} B(c, 2^{-\|z\|})$. En effet, l'inclusion $\subseteq$ est claire, et toute configuration c' qui est à distance $< 2^{-\|z\|}$ de $c \in O_{z,s}$ vérifie forcément $c'(z) = s$, donc l'inclusion $\supseteq$ est vraie également.
- Les ouverts de la topologie de l sont ouverts pour la topologie produit. En effet, soient $r > 0$ et $m = \min\left\{k \mid 2^{-k} < r\right\}$. On a alors $B(c, r) = \cap_{\|z\| \leqslant m} O_{z,c(z)}$ qui est une intersection finie d'ouverts.
- Par ailleurs, S muni de la topologie discrète est compact (c'est évident puisque la topologie sur S est finie), donc par le théorème de Tychonoff, on déduit que $S^{\mathbb{Z}^d} = \prod_{\mathbb{Z}^d} S$ muni de la topologie produit (qui est la même que la topologie de la distance l) est compact.

■

1.2.3 caractérisation des fonctions globales

Une fonction est dite ***invariante par décalage*** si et seulement si elle commute avec le décalage (shift) (en anglais : ***shift-invariante***).

Théorème 1.9 (Richardson, 1972) Une fonction $f : S^{\mathbb{Z}^d} \to S^{\mathbb{Z}^d}$ est continue et shift-invariante si et seulement si f est la fonction globale d'un automate cellulaire.

Preuve

sens $\Leftarrow$ Il est facile de voir que la fonction globale d'un automate cellulaire est invariante par décalage.

L'avantage de métriser l'espace $S^{\mathbb{Z}^d}$ est de montrer plus facilement la continuité d'une fonction, car alors c'est la notion «usuelle» de continuité (avec les ε, plutôt que de passer par la définition générale avec les ouverts). Il suffit donc de montrer que les images par la fonction globale Δ d'un automate cellulaire de deux configurations proche sont aussi proches. Formellement : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \qquad l(c, c') < \eta \Rightarrow l(\Delta(c), \Delta(c')) < \varepsilon$.

Soit H le voisinage de l'automate cellulaire, $M := \max\{\| z \| \mid z \in H\}$. Sans perte de généralité, prenons $\varepsilon = 2^{-n}$. Il suffit alors de prendre $\eta = \varepsilon / 2^M = 2^{-(n+M)}$. En effet, si $l(c, c') < \eta$, alors c et c' coïncident sur tous les z tels que $\| z \| \leqslant n + M$, donc l'application de la fonction globale Δ sera identique sur tous les z tels que $\| z \| \leqslant n$, c'est-à-dire $l(\Delta(c), \Delta(c')) < \varepsilon$.

sens $\Rightarrow$ construisons un automate cellulaire $\mathcal{A} = (d, S, H, \delta)$ qui ait pour fonction globale f. d et S sont imposés.

Soit $s \in S$. $O_{0,s}$ est à la fois ouvert et fermé, donc $f^{-1}(O_{0,s})$ est aussi à la fois ouvert et fermé car f est continue. Puisque $f^{-1}(O_{0,s})$ est ouvert, il s'écrit comme une union des ouverts de base : $f^{-1}(O_{0,s}) = \cup_{p \in \Pi} O_p$. Or

$f^{-1}(O_{0,s})$ est un fermé dans un compact, donc il est lui-même compact, donc on peut extraire du recouvrement précédent un sous-recouvrement fini : il existe des motifs $p_1, \ldots, p_m$ tels que $f^{-1}(O_{0,s}) = \cup_{j=1}^{m} O_{p_j}$. On peut faire de même pour tous les états $s_i \in S$, on obtient alors $f^{-1}(O_{0,s_i}) = \cup_{j=1}^{m_i} O_{p_j^i}$.

On pose $H = \cup_{i=1}^{|S|} \cup_{j=1}^{m_i} \mathrm{dom}(p_j^i)$. H est une union finie d'ensembles finis, donc est lui-même fini : on note $H = \{v_1, \ldots, v_{|H|}\}$.

Il reste à définir la fonction de transition $\delta : S^{|H|} \to S$ de $\mathcal{A}$. Soit $(t_1, \ldots, t_{|H|}) \in S^{|H|}$, on veut définir la valeur s_i de $\delta(t_1, \ldots, t_{|H|})$. D'après la définition des ensembles O_p, et comme $f^{-1}(O_{0,s_i}) = \cup_{j=1}^{m_i} O_{p_j^i}$,
$\exists!\ 1 \leqslant i \leqslant |S|, \quad \exists\ 1 \leqslant j \leqslant m_i, \quad \forall v_k \in \mathrm{dom}(p_j^i) \qquad p_j^i(v_k) = t_k$. La justification de ce «$\exists!\ i$» est un peu technique.

- Existence : soit c une configuration telle que $\forall\ 1 \leqslant k \leqslant |h|, c(v_k) = t_k$. Soit $c' = f(c)$ et $s_i = c'(0)$ (c'est à dire $s_i = f(c)(0)$). Il suffit alors de choisir p_j^i tel que $O_{p_j^i} \in f^{-1}(O_{0,s_i})$.
- Unicité : si p_j^i et $p_{j'}^{i'}$ vérifient $\forall v_k \in \mathrm{dom}(p_j^i), \quad p_j^i(v_k) = t_k$, alors p_j^i et $p_{j'}^{i'}$ coïncident sur l'intersection de leurs domaines. Il existe donc une configuration c coïncidant avec p_j^i et $p_{j'}^{i'}$ sur leurs domaines respectifs. c coïncide avec p_j^i sur son domaine et $f^{-1}(O_{0,s_i}) = \cup_{j=1}^{m_i} O_{p_j^i}$, donc $f(c)(0) = s_i$. Par le même argument, $f(c)(0) = s_{i'}$. Donc $i = i'$.

On définit alors $\delta(t_1, \ldots, t_{|H|}) = s_i$.

Puisque f est invariante par décalage, cette construction est équivalente en tout autre point qu'en 0, donc on a bien construit la fonction de transition d'un automate cellulaire $\mathcal{A}$. De plus, par construction, la fonction globale $\Delta_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ est égale à f.

$\blacksquare$

Remarque La distance l n'est pas invariante par décalage (c'est à dire que la distance entre deux configurations n'a rien à voir avec la distance entre leurs décalées). La fonction décalage est même chaotique avec cette distance. Ainsi, demander la continuité d'une fonction f pour cette topologie et demander en plus que f soit shift-invariante est une condition très forte. D'autres distances sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ sont invariantes par décalage, mais la topologie induite ne rend plus l'espace compact.

1.2.4 inj-, surj-, bijectivité

Définition Un automate cellulaire est dit ***injectif*** (resp. ***surjectif***, ***bijectif***) quand sa fonction globale est injective (resp. surjective, bijective).

Nous montrerons le théorème suivant plus tard dans le cours (la démonstration est fondée sur du dénombrement), nous allons en voir quelques conséquences. (Moore montra un sens en 1962, Myhill l'autre en 1963.)

Théorème 1.10 (DU JARDIN D'ÉDEN.) Un automate cellulaire avec état quiescent est surjectif si et seulement si sa restriction aux configurations finies est injective.

On notera dans la suite $\mathcal{F}$ l'ensemble des configurations finies, $\mathcal{P}$ l'ensemble des configurations espace-périodiques.

Corollaire 1 *Injectivité et bijectivité sont équivalentes pour les automates cellulaires.*

Preuve

Si $\mathcal{A}$ est bijectif, alors il est injectif. Réciproquement, s'il est injectif, sa restriction à $\mathcal{F}$ est injective, donc il est aussi surjectif d'après le théorème du jardin d'Éden.

■

DÉFINITION Un automate cellulaire est dit ***réversible*** s'il est bijectif et si l'inverse de sa fonction globale est aussi la fonction globale d'un automate cellulaire.

Si une fonction est invariante par décalage, son inverse l'est aussi (il suffit de considérer le groupe des bijections de $S^{\mathbb{Z}^d}$ dans lui-même). Comme $S^{\mathbb{Z}^d}$ est compact, l'inverse d'une bijection continue est aussi une bijection continue. Il suit en corollaire du théorème de Richardson :

Corollaire 2 *Bijectivité et réversibilité sont équivalentes pour les automates cellulaires.*

On note $\Delta_{\mathcal{A}|\mathcal{F}}$ la fonction globale de $\mathcal{A}$ restreinte aux configurations finies, et $\Delta_{\mathcal{A}|\mathcal{P}}$ sa restriction aux configurations espace-périodiques.

Proposition 1.11 *Bijectivité et surjectivité sont équivalentes pour les automates cellulaires restreints aux configurations finies.*

Preuve

Il suffit de montrer que la surjectivité implique la bijectivité. $\mathcal{F}$ est dense dans $S^{\mathbb{Z}^d}$: si l'on a une configuration c quelconque, on la tronque de plus en plus loin pour avoir une suite de configurations finies qui tend vers c. De plus, $\Delta_{\mathcal{A}}$ est continue, donc $\Delta_{\mathcal{A}|\mathcal{F}}$ surjective $\Rightarrow \Delta_{\mathcal{A}}$ surjective.

Pour ceux qui ne sont pas convaincus, voici une preuve qui fait intervenir quelques nouvelles notions de topologie. Soit c une configuration et (c_n) une suite de configurations finies tendant vers c. $S^{\mathbb{Z}^d}$ étant compact et métrisable, il est séquentiellement compact et donc de $\Delta^{-1}_{\mathcal{A}|\mathcal{F}}(c_n)$ on peut extraire une sous-suite convergeant vers une configuration c'. Par continuité $\Delta_{\mathcal{A}}(c') = c$.

Par le théorème du jardin d'Éden, $\Delta_{\mathcal{A}|\mathcal{F}}$ est injective, d'où la proposition.

■

1.2.5 restriction aux configurations périodiques

Proposition 1.12 *Soit $\mathcal{A}$ un automate cellulaire de dimension 1 surjectif. Alors toute configuration espace-périodique admet au moins un antécédent espace-périodique :* $\Delta_{\mathcal{A}}$ *surjective* $\Rightarrow \Delta_{\mathcal{A}|\mathcal{P}}$ *surjective.*

Preuve

Soit l la plus grande distance à laquelle se trouve un voisin d'une cellule ($l = max\{|z| \mid z \in H\}$). Soit c une configuration espace-périodique de période p et c' un antécédent de c. Considérons dans c' une suite (z_i) de cellules espacées de p. Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de blocs où B_i est de taille l et est centré sur la cellule z_i. Puisque les blocs sont de taille finie, il existe deux blocs identiques B_i et B_j ($i < j$) à deux endroits différents. En répétant la séquence de cellules allant de B_i à B_j, on construit la configuration $\cdots B_j B_{i+1} B_{i+2} \cdots B_j B_{i+1} \cdots B_j B_{i+1} \cdots$. Cette configuration est périodique ; elle a la même image que c' (c'est-à-dire c) car les blocs sont de taille l et la fonction de transition ignore les cellules distantes de plus de l.

■

Proposition 1.13 *En dimension 1, l'injectivité sur les configurations périodiques implique l'injectivité partout :* $\Delta_{\mathcal{A}|\mathcal{P}}$ *injective* $\Rightarrow \Delta_{\mathcal{A}}$ *injective.*

Admis.

Théorème 1.14 (Kari, 1989) Les problèmes de la réversibilité et de la surjectivité sont indécidables pour les automates cellulaires de dimension 2.

Admis (difficile).

On en déduit la proposition suivante, due également à Kari en 1989 :

Proposition 1.15 *En dimension 2, l'injectivité sur les configurations périodiques n'implique pas l'injectivité partout :* $\Delta_{\mathcal{A}|\mathcal{P}}$ *injective* $\not\Rightarrow \Delta_{\mathcal{A}}$ *injective.*

Preuve

Si l'implication était vraie, elle impliquerait la décidabilité de la réversibilité en dimension 2. En effet, l'injectivité sur les périodiques est décidable comme nous allons le voir, et nous avons vu (corollaires du théorème 1.10 du jardin d'Éden, page 21) qu'injectivité et réversibilité étaient équivalentes pour les automates cellulaires. Ainsi, la réversibilité serait décidable, ce qui contredirait le théorème de Kari.

Il reste donc à montrer que l'injectivité sur les périodiques est décidable. Nous allons construire deux semi-algorithmes (qui ne s'arrêtent que sur les instances positives), l'un pour tester l'injectivité, l'autre pour la non-injectivité de l'automate cellulaire $\mathcal{A}$.

Pour l'injectivité On cherche l'automate cellulaire inverse $\mathcal{A}'$ (tel que pour toute configuration c, $\Delta_{\mathcal{A}'}(\Delta_{\mathcal{A}}(c)) = c$). Pour cela, notons qu'il suffit de s'intéresser à des portions de configurations de taille $(2l)^d$, où l est le maximum des diamètres de H et H' :
$l = \max(\max\{\| z - z' \| \mid z, z' \in H\}, \max\{\| z - z' \| \mid z, z' \in H'\})$. En effet, si $\Delta_{\mathcal{A}'}(\Delta_{\mathcal{A}}(c)) \neq c$ alors $\exists z$ tel que $\Delta_{\mathcal{A}'}(\Delta_{\mathcal{A}}(c))(z) \neq c(z)$. On peut se ramener à $z = 0$ par invariance par décalage. Ainsi, avec un certain abus de notations, $\delta_{\mathcal{A}'}(\delta_{\mathcal{A}}(H)+H') \neq c(0)$, donc il suffit de calculer $\delta_{\mathcal{A}'}(\delta_{\mathcal{A}}(H)+H')$, ce qui se fait en ne considérant que les motifs de diamètre $2l$ (les portions de configurations de taille $(2l)^d$). L'essentiel étant qu'on a besoin de tester seulement une portion finie (et toujours de la même taille pour un automate cellulaire donné) de chaque configuration.

On énumère les automates cellulaires, pour chaque automate cellulaire on teste un nombre fini de motifs comme indiqué ci-dessus : on calcule d'abord $\delta_{\mathcal{A}}$ puis $\delta_{\mathcal{A}'}$ sur le résultat obtenu, et on compare avec la configuration initiale. Si pour touts ces motifs on revient sur la configuration initiale, alors $\mathcal{A}$ est injectif.

Pour la non-injectivité On énumère les paires $\{c, c'\}$ de configurations périodiques ($c \neq c'$) tant que $\Delta_{\mathcal{A}}(c) \neq \Delta_{\mathcal{A}}(c')$. Bien sûr on ne considère qu'un nombre fini de périodes de c et c' (juste assez pour avoir tout le voisinage), ce qui nous ramène à un nombre fini de cellules. Si $\Delta_{\mathcal{A}}(c) = \Delta_{\mathcal{A}}(c')$ alors l'automate cellulaire n'est pas injectif.

En exécutant les deux semi-algorithmes en parallèle, on décide en un temps fini si l'automate cellulaire est injectif sur les configurations périodiques.

■

1.2.6 preuve du théorème du jardin d'Eden

On démontre le théorème du jardin d'Eden en dimension deux et pour le voisinage de Moore. La généralisation est aisée.

Lemme *Soit $f : S^{\mathbb{Z}^d} \to S^{\mathbb{Z}^d}$ continue et non surjective. Alors il existe un ouvert de base O dont aucun point n'a d'antécédant (ie $f^{-1}(O) = \emptyset$).*

<u>Preuve</u>

Par contraposition : supposons $\forall p \exists x \quad f(x) \in O_p$. Soit c une configuration, il suffit de montrer que $\exists c' \quad f(c') = c$.

On pose $O_i = \left\{ a \in S^{\mathbb{Z}^d} \;\middle|\; \forall z \in \mathbb{Z}^d \; ||z|| \leqslant i \Rightarrow a(z) = c(z) \right\}$ (c'est l'ensemble des configuration qui coïncident avec c pour $||z|| \leqslant i$). O_i est un ouvert de base. On définit une suite de configurations c_i par $f(c_i) \in O_i$ (existence par hypothèse). Alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(c_i, c_{i+n}) \leqslant 2^{-i}$. Donc (c_i) est de

Cauchy dans un espace complet (car compact), donc (c_i) converge vers une configuration l.

Montrons que l convient. Soit $z \in \mathbb{Z}^d$. f est continue donc $f(c_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(l)$, en particulier il existe i tel que $f(c_i)(z) = f(l)(z)$. Alors $f(l)(z) = f(c_i)(z) = c(z)$ car $f(c_i) \in 0_i$.

■

Preuve

Δ_A non surjective $\Rightarrow$ $\Delta_{A|\mathcal{F}}$ non injective. Supposons par l'absurde $\Delta_{A|\mathcal{F}}$ injective.

Δ_A étant continue, si elle n'est pas surjective alors elle est n'est pas surjective sur un ouvert de base (lemme). Cela signifie qu'il existe une configuration finie qui n'a pas d'antécédents, on note P cette configuration complétée en un carré, de taille n, par des états quiescents.

Considérons un carré D de taille $kn \times kn$. On compte dans ce carré le nombre N de configurations qui ne sont pas des jardins d'Eden, c'est à dire qui ont un antécédent. Ce sont au plus toutes les configurations qui ne contiennent pas P. Donc $N \leqslant (|S|^{n^2} - 1)^{k^2}$.

D'autre part, si l'on considère le carré $(kn-2) \times (kn-2)$, chacune des images de ses configurations est une configuration de D, qui a donc un antécédent. Par injectivité de $\Delta_{A|\mathcal{F}}$, ces images sont distinctes donc $N \geqslant |S|^{(kn-2)^2}$.

On a ainsi : $\forall k > 0, \quad |S|^{(kn-2)^2} \leqslant \left(|S|^{n^2} - 1\right)^{k^2}$. C'est absurde.

$\Delta_{A|\mathcal{F}}$ non injective $\Rightarrow$ Δ_A non surjective. Supposons par l'absurde Δ_A surjective.

Soient deux configurations finies distinctes c_1 et c_2 vérifiant $\Delta_A(c_1) = \Delta_A(c_2)$. Soit un carré suffisamment grand pour contenir tous les états non quiescents de c_1 ou c_2 (la plus grande des deux), auquel on ajoute une bordure de largeur 1 remplie d'états quiescents. On désignera sa taille par n.

On se place maintenant dans un carré de taille $kn \times kn$ constitué de k^2 petits carrés de taille $n \times n$. On compte le nombre de configurations du carré ayant un antécédent. Chaque carré $n \times n$ peut avoir au plus $|S|^{n^2} - 1$ images, puisque les images de c_1 et c_2 (complétées et bordées d'états quiescents) sont les mêmes.

Mais comme Δ_A est surjective, toutes les configurations possibles du carré central $(kn-2) \times (kn-2)$ sont atteintes, elles ont donc un antécédent dans le carré.

On a la même contradiction : $\forall k > 0, \quad (|S|^{n^2} - 1)^{k^2} \geqslant |S|^{(kn-2)^2}$.

■

1.2.7 diagramme récapitulatif

Avec quelques théorèmes supplémentaires, on obtient le diagramme :

Δ_A bijective $\Leftrightarrow$ A réversible $\Leftrightarrow$ Δ_A injective		
$\Downarrow$ $\not\Uparrow$		$\Downarrow$ $\uparrow^1_f$
$\Delta_{A\mid\mathcal{F}}$ bijective	$\overset{\not\Rightarrow}{\underset{1o}{\longleftarrow}}$	$\Delta_{A\mid\mathcal{P}}$ bijective $\Leftrightarrow$ $\Delta_{A\mid\mathcal{P}}$ injective
$\Updownarrow$		$\Downarrow$ $\not\Uparrow$
$\Delta_{A\mid\mathcal{F}}$ surjective	$\overset{\not\Leftarrow}{\underset{1o}{\longrightarrow}}$	$\Delta_{A\mid\mathcal{P}}$ surjective
$\Downarrow$ $\not\Uparrow$		$\Downarrow$ $\uparrow^1_o$
$\Delta_{A\mid\mathcal{F}}$ injective $\Leftrightarrow$ pas de jardin d'Eden $\Leftrightarrow$ Δ_A surjective		

Le symbole «$\uparrow^1_f$» signifie «$\Uparrow$ en dimension 1, faux sinon» et «$\uparrow^1_o$» signifie «$\Uparrow$ en dimension 1, problème ouvert pour les dimensions supérieures».

Chapitre 2

Automates à seuil

2.1 Un autre modèle de systèmes complexes

On change de modèle, et on verra une nouvelle méthode d'analyse du comportement de certains systèmes complexes. Regarder les figures quelques pages plus loin pour se faire une première idée.

2.1.1 Modèle

L'idée générale est celle d'un réseau de neurones dans lequel un neurone devient actif lorsqu'il est suffisamment excité.

Considérons un ensemble de sites (ou neurones, sommets...) numérotés de 1 à N. Notons $\sigma_i(t)$ l'état du site i à la date t. On définit la dynamique du système par $\begin{array}{rccl} \sigma_i : & \mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ & t+1 & \mapsto & 1 \text{ si et seulement si } \sum_{j=1}^N a_{ij}\sigma_j(t) \geqslant b_i \end{array}$ où

$$\begin{array}{rl} A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,N]\!]} & \text{est la matrice des poids, elle est symétrique réelle.} \\ b = (b_1,\dots,b_N) & \text{est le vecteur des seuils } (\forall i, b_i \in \mathbb{N}). \end{array}$$

On note Φ_{gtf} la fonction de transition associée à ce comportement. (gtf pour «global threshold function»). Ainsi :

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_{gtf} : & \{0,1\}^N & \to & \{0,1\}^N \\ & (\sigma_1(t),\dots,\sigma_N(t)) & \mapsto & (\sigma_1(t+1),\dots,\sigma_N(t+1)) \end{array}$$

On veut étudier l'évolution du système dans le temps (on itère de façon synchrone les σ_i pour $t \in \mathbb{N}$).

On supposera par la suite sans perdre en généralité que b vérifie toujours :

$$\forall t, i, \sigma, \quad b_i \neq \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sigma_j(t)$$

(il suffit de changer légèrement A pour obtenir cette condition en conservant Φ_{gtf}).

2.1.2 Fonction de Lyapunov

DÉFINITION g est une fonction de Lyapunov si et seulement si elle est «décroissante», ie

$$\forall \sigma, t \geqslant 0, \quad g(\sigma(t)) \geqslant g(\sigma(t+1))$$

On considère $L(\sigma(t), \sigma(t+1))$ définie par :

$$\begin{array}{lccc} & -\sum_{i=1}^{N} \sigma_i(t+1) \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sigma_j(t) & + & \sum_{i=1}^{N} b_i(\sigma_i(t+1) - \sigma_i(t)) \\ = & \langle \sigma(t+1), A\sigma(t) \rangle & + & \langle b, \sigma(t+1) - \sigma(t) \rangle \end{array}$$

en notant $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel.
On définit enfin $\Delta_t L = L(\sigma(t), \sigma(t+1)) - L(\sigma(t-1), \sigma(t))$.
Comme A est symétrique on a :

$$\Delta_t L = -\sum_{i=1}^{N} \left((\sigma_i(t+1) - \sigma_i(t-1)) \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sigma_j(t) - b_i \right) \right)$$

Considérons le i^{e}terme du premier Sigma. Il y a trois cas :
- $\sigma_i(t+1) = \sigma_i(t-1)$. Ce terme est alors nul.
- $\sigma_i(t+1) = 1$ et $\sigma_i(t-1) = 0$. Alors $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sigma_j(t) - b_i > 0$ (définition de $\sigma_i(t+1)$) donc il est positif.
- $\sigma_i(t+1) = 0$ et $\sigma_i(t-1) = 1$. Il est alors positif pour la même raison.

Ainsi pour tout t, $\Delta_t L \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si
$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \sigma_i(t+1) = \sigma_i(t-1)$, ie

$$\Delta_t L = 0 \Leftrightarrow \sigma(t+1) = \sigma(t-1)$$

On a donc une fonction de Lyapunov pour la règle Φ_{gtf}. Comme N est fini, le système atteint toujours un cycle. Soit $\sigma(0), \ldots, \sigma(T-1)$ un cycle de période T. L est nécessairement constante sur ce cycle. En particulier $\Delta_1 L = 0$, et comme vu ci-dessus ceci impose $\sigma(0) = \sigma(2)$. On en déduit : $T \leqslant 2$. Cela mérite le nom de théorème :

Théorème 2.1 Si A est symétrique et N fini, alors les orbites sont ultimement soit des points fixes soit des cycles de période 2.

2.1.3 Cas particulier de la règle majoritaire en dimension 1

Considérons l'automates cellulaire de dimension 1, de rayon r.
La règle majoritaire Φ_{1d-maj} s'exprime ainsi :

$$\sigma_i(t+1) = 1 \text{ si et seulement si } \sum_{j=i-r}^{i+r} \sigma_j(t) \geqslant r+1$$

C'est un automate à seuil.

Théorème 2.2 Toute configuration finie converge en un temps fini vers un point fixe.

Preuve

Le résultat précédent ne s'applique pas ici car le nombre de sites est infini. Mais la règle rend l'espace fini en pratique : un 0 au bord de la configuration ne peut changer. La zone zone dynamique de l'automate est donc bornée. D'après le théorème précédent, les orbites sont ultimement des points fixes ou des cycles de période 2.

Reste à éliminer la possibilité du cycle de période 2. Avec les mains, la zone dynamique est de la forme $1^{n_1}0^{n_2}1^{n_3}\dots 1^{n_m}$.

Si pour tout i, $n_i \geqslant r+1$ alors c'est un point fixe. Sinon soit a minimal tel que $n_a < r+1$, alors n_a devient $n_a - 2$ à l'itération suivante, jusqu'à disparaître en un temps fini (n_{a-1} augmente et les précédents sont inchangés). ■

2.2 Circuits positifs et circuits négatifs

2.2.1 le cadre

On note N le nombre de sommets.

On peut se ramener à des configurations dans $\{-1,1\}^N$. On ne fait plus l'hypothèse que la matrice de poids synaptiques est symétrique, donc le graphe de connexions sous-jacent est orienté.

$$G=(V,E),\ E\subseteq V\times V,\ V=\{v_1,\dots,v_N\}$$

DÉFINITIONS

On note

- $\Gamma_G^+(v_i)$ l'ensemble des sommets v_j tels que $(v_i,v_j)\in E$,
- $\Gamma_G^-(v_i)$ ceux tels que $(v_j,v_i)\in E$.

rappels de graphes

- Une ***chaîne*** est une suite alternée non vide de sommets et d'arcs $C=(v_0,e_1,v_1,\dots,e_q,v_q)$ où l'on prend chaque arc une seule fois, dans n'importe quel sens : $\begin{cases}\forall i,j \quad e_i\neq e_j\\ \forall k \quad e_k=(v_{k-1},v_k) \text{ ou } e_k=(v_k,v_{k-1})\end{cases}$
- La ***longueur*** $l(C)$ de la chaîne est son nombre d'arcs. v_0 et v_q sont respectivement les somments initial et final de C.
- Une chaîne est ***élémentaire*** si chaque sommet apparaît une seule fois, avec exception possible pour le premier et dernier sommet qui peuvent coïncider.

- Une chaîne est ***fermée*** si le premier et le dernier sommet coïncident.
- Un ***cycle*** est une chaîne élémentaire fermée.
- Un ***chemin*** est une chaîne telle que $\forall k, e_k = (v_{k-1}, v_k)$ (on prend les arcs dans le bon sens).
- Un ***circuit*** est un chemin élémentaire fermé.
- Un graphe est ***connexe*** s'il existe une chaîne entre tout couple de sommets.
- Un graphe est ***fortement connexe*** s'il existe un chemin entre tout couple de sommets.
- Si $W = (w_{ij})$ est une matrice réelle $N \times N$, on dit que G est le ***graphe de connexion*** associé à W si $(v_j, v_i) \in E \Leftrightarrow w_{ij} \neq 0$.

encore un peu

- On pose signe : $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $\mathbb{1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geqslant 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
- On définit $\text{signe}\,((v_i, v_j)) = \text{signe}(w_{ij})$.
- Un cycle ou un circuit de G est dit ***positif*** si le nombre de ses arcs négatifs est pair. Il est ***négatif*** sinon.

On ne va pas s'intéresser aux itérées de la fonction de transition mais seulement aux points fixes. Pour simplifier les notations, nous noterons la fonction de transition Φ sous la forme des N fonctions f_i associées aux sommets : si $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N$ est une configuration, alors

$$f_i(\sigma) = \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\sigma_j - b_i\right)$$

Définition Une configuration σ est un ***point fixe*** pour l'automate à seuil $S = (G, W, b)$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, N]\!], f_i(\sigma) = \sigma_i$.

2.2.2 hypothèses

Par la suite, et sans perte de généralité, nous supposerons que G est connexe (sinon on travaille sur les composantes connexes). On supposera aussi que $\forall v_i \in V,\ \left|\Gamma_G^-(v_i)\right| > 0$. En effet si $\left|\Gamma_G^-(v_i)\right| = 0$, f_i est une fonction constante et donc sans intérêt. Donc il existe au moins un circuit dans G. (éventuellement de la forme (v_i, e_i, v_i), i.e. une boucle).

On supposera que $\forall v_i, v_j \in V$ tels que $(v_i, v_j) \in E, i \neq j$, il existe $\sigma \in \{-1, 1\}^N$ telle que :

$$\mathbb{1}\left(\sum_{k} w_{jk}\sigma_k - b_j\right) \neq \mathbb{1}\left(\sum_{k \neq i} w_{jk}\sigma_k - b_j\right)$$

Cela signifie que tous les arcs de G jouent un rôle dans la dynamique. Si (v_i, v_j) est supprimé (i.e. si w_{ij} devient nul) alors le comportement de l'automate change.

On dit que l'automate est ***quasi-minimal*** s'il vérifie cette condition.

En particulier, une condition nécessaire pour que l'automate soit quasi-minimal est qu'aucune des f_i ne soit constante, i.e. :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad -\sum_j |w_{ij}| \leqslant b_i \leqslant \sum_j |w_{ij}|$$

2.2.3 propriétés des cycles

Nous allons énoncer des résultats reliant l'existence ou le nombre de points fixes à des propriétés des cycles ou des circuits. Ces résultats ne dépendent que des signes des poids et non des valeurs, i.e. ils ne dépendent que du graphe signé.

Soit S un automate à seuil $S = (G, W, b)$.

Proposition 2.3 *Un cycle C de G est positif si et seulement s'il existe un vecteur $x = (x_0, \dots, x_{l(C)}) \in \{-1, 1\}^{l(C)}$, vérifiant l'équation :*
$\forall (v_i, v_j)$ arc de $C, \mathrm{signe}(w_{ij}) = x_i x_j$, ou de manière équivalente :

$$x_j = \mathrm{signe}(w_{ij}) x_i$$

Remarque $-x = (-x_0, \dots, -x_{l(C)})$ vérifie la même équation si et seulement si x la vérifie.

<u>Preuve</u>

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, "+"] & 1 \arrow[dr, "-"] & \\
-1 \arrow[ur, "-"] & & & -1 \arrow[dl, "+"] \\
 & 1 \arrow[ul, "-"] & -1 \arrow[l, "-"] &
\end{tikzcd}$$

Soit $C = (v_0, e_1, \dots, e_k, v_0)$ un cycle positif de G. Définissons x comme suit :

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 1 \\ x_j & = & \begin{cases} \mathrm{signe}(w_{j,j-1}) x_{j-1} \text{ si } (v_{j-1}, v_j) \in C \\ \mathrm{signe}(w_{j-1,j}) x_{j-1} \text{ si } (v_j, v_{j-1}) \in C \end{cases} \end{array}$$

Comme le cycle est positif, cette définition est cohérente et clairement x et $-x$ vérifient la propriété.

Réciproquement, soit C un cycle et x vérifiant les conditions, alors

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{k} \text{signe}(e_i) &= \prod_{i=0}^{k} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k} x_i\right)\left(\prod_{i=0}^{k} x_{i+1}\right) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k} x_i\right)^2 > 0\end{aligned}$$

donc C est positif.

■

Remarque x et $-x$ sont les seuls vecteurs à vérifier la condition de la proposition.

Théorème 2.4 Si tous les cycles d'un automate à seuil $S = (G, W, b)$ sont positifs, alors il existe un configuration $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N$ tel que σ et $-\sigma$ sont des points fixes de S.

<u>Preuve</u>

Soit T un arbre couvrant quelconque de G, i.e. $\forall v_i, v_j \in V$, il existe dans T une unique chaîne de v_i à v_j.

Définissons σ comme suit : soit $C_{1i} = (v_1, e_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, e_{i_k}, v_i)$ l'unique chaîne allant de v_1 à v_i dans T,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 1 \\ \sigma_i &= \prod_{j=1}^{k} \text{signe}(e_{ij})\end{aligned}$$

Nous allons montrer que σ vérifie la condition suivante :

$$\forall i, j \in [\![1, N]\!], \quad (v_i, v_j) \in E \Rightarrow \text{signe}((v_i, v_j)) = \sigma_i \sigma_j$$

Notons $C_{1j} = (v_1, e_{i'_1}, v_{i'_2}, \ldots, e_{i'_{k'}}, v_j)$ l'unique chaîne de v_1 à v_j dans T. Considérons le cycle : $C = (\underbrace{v_1, e_{i_1}, \ldots, v_i}_{C_{1i}}, (v_i, v_j), \underbrace{v_j, e_{i'_{k'}}, \ldots, e_{i'_1}, v_1}_{(C_{1j})^{-1}})$.

C est positif donc $\left(\prod_{l=1}^{k} \text{signe}(e_{i_l})\right) \text{signe}((v_i, v_j)) \left(\prod_{l=1}^{k'} \text{signe}(e_{i'_l})\right) = 1$.

Mais, par construction de σ, $\prod_{l=1}^{k} \text{signe}(e_{i_l}) = \sigma_i$ et $\prod_{l=1}^{k'} \text{signe}(e_{i'_l}) = \sigma_j$, donc $\text{signe}((v_i, v_j)) = \sigma_i \sigma_j$.

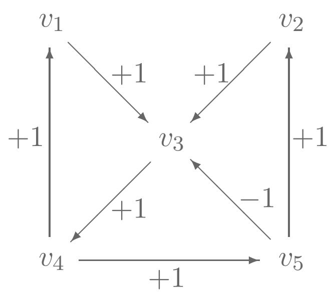
Montrons maintenant que σ et $-\sigma$ sont des points fixes. Soit $i \in [\![1, N]\!]$, si $\sigma_i = 1$, alors $\text{signe}(w_{ij})\sigma_j = 1$ pour tout j tel que $(v_j, v_i) \in V$. Par conséquent $w_{ij}\sigma_j = |w_{ij}|$ et donc $\sum_j |w_{ij}| \geqslant b_i$ puisque S est quasi-minimal par hypothèse. Donc $f_i(\sigma) = \mathbb{1}\left(\sum_j w_{ij}\sigma_j - b_i\right) = 1 = \sigma_i$.

De même si $\sigma_i = -1, w_{ij}\sigma_j = -|w_{ij}|$ et donc $\sum_j w_{ij}\sigma_j = -\sum_j |w_{ij}| < b_i$ donc $f_i(\sigma) = -1 = \sigma_i$. Donc σ est un point fixe. $-\sigma$ l'est aussi de façon analogue.

■

Remarques

- La preuve ne dépend pas de l'arbre couvrant T choisi. En fait, la configuration σ que l'on construit ne dépend pas de T. Si T' est un autre arbre couvrant de G, notons C'_{1i} la chaîne dans T' entre v_1 et v_i. Si $C'_{1i} \neq C_{1i}$, par hypothèse le cycle obtenu par concaténation de C_{1i} et C'_{1i} est positif donc le signe de C'_{1i} est le même que celui de C_{1i}.
- La condition du théorème est suffisante mais pas nécessaire :
  Exemple



Il existe un cycle négatif mais on peut vérifier que les deux configurations $(1,\ldots,1)$ et $(-1,\ldots,-1)$ sont points fixes.

Théorème 2.5 Soit $S = (G, W, b)$ un automate à seuil tel que tous les circuits de G sont négatifs. Alors S n'admet pas de point fixe.

Preuve

Soit σ un point fixe de S et soit c un circuit de G. Comme c est négatif, il existe d'après la proposition 2.3 $(v_i, v_j) \in c$ tel que signe$(w_{ji})\sigma_i \neq \sigma_j$. Posons $E^- = \{(v_i, v_j) \in E \mid \text{signe}(w_{ji})\sigma_i \neq \sigma_j\}$. $E^- \neq \emptyset$.

Définissons $S' = (G', W', b)$ de la façon suivante :
$G' = (V, E' = E \setminus E^-)$
$W' = (w'_{ij})$ où $w'_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{si } (v_j, v_i) \notin E^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si $\forall v \in V' \quad \left|\Gamma^-_{G'}(v_j)\right| > 0$, alors il existerait un circuit dans G'. Ce circuit serait aussi un circuit de G donc il serait négatif. Ce circuit de G' où l'on a enlevé les “mauvais arcs” vérifierait la condition de la proposition 2.3 (vecteur σ) donc serait positif, contradiction.

Ainsi il existe v_l tel que $\Gamma^-_{G'}(v_l) = \emptyset$. Mais alors aucun sommet ne pousse v_l à rester dans son état : $\forall v_k \in \Gamma^-_G(v_l)$ signe$(w_{lk})\sigma_k \neq \sigma_l$.

Si $\sigma_l = 1$ alors $\sum\limits_k w_{lk}\sigma_k = -\sum\limits_k |w_{lk}|$ et donc $\sum\limits_k w_{lk}\sigma_k - b_l < 0$. Par conséquent, $\mathbb{1}\left(\sum\limits_k w_{lk}\sigma_k - b_l\right) \neq \sigma_l$ ce qui contredit le fait que σ est un point fixe.

Le cas $\sigma_l = -1$ est analogue.

$\blacksquare$

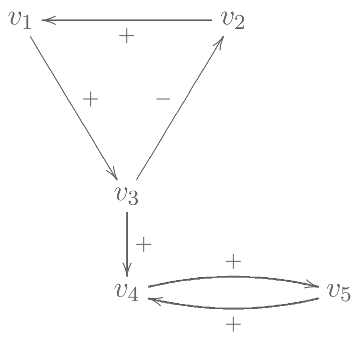
Corollaire 1 *Si $S = (G, W, b)$ est tel qu'il existe F une composante fortement connexe de G dont tous les circuits sont négatifs et n'admettant pas d'arc entrant, alors S n'admet pas de points fixes.*

<u>Preuve</u>

Tout point fixe de S serait un point fixe de $S_{|F}$.

$\blacksquare$

Remarque La condition du théorème n'est pas nécessaire :



$b = (0, 0, 0, 0, 0)$

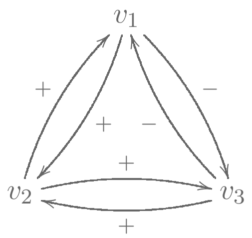
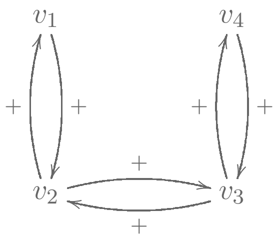
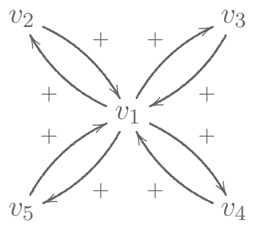
S n'a pas de points fixes d'après le corollaire, mais admet un circuit positif.

2.3 Bornes sur le nombre de points fixes

2.3.1 cas général : PFVS

Nous allons maintenant essayer de borner le nombre de points fixes, notamment en fonction du nombre de circuits positifs. Intuitivement, ces points fixes viennent des circuits positifs et il n'y a que deux possibilités pour un point fixe sur un circuit positif. L'idée est de fixer la configuration de chaque circuit positif en en fixant un point.

Toujours de manière informelle, considérons les trois automates suivants où les poids des arcs sont de poids $+1$ ou -1 :

G_1	G_2	G_3
		
$b_1 = (-1, 1, -1)$	$b_2 = (0, 0, 0, 0)$	$b_3 = (0, 0, 0, 0, 0)$

Comparons le nombre de circuits positifs :

3	3	4

à l'ensemble des points fixes :

$(1, 1, 1)$ $(-1, -1, 1)$ $(1, -1, -1)$	$(1, 1, 1, 1)$ $(-1, -1, -1, -1)$	$(1, 1, 1, 1, 1)$ $(-1, -1, -1, -1, -1)$

La relation entre nombre de points fixes et nombre de circuits positifs ne semble pas directe.

Définition Un ***ensemble de sommets à retour positif*** (ou mieux en anglais ***positive feedback vertex set***, abrégé en PFVS) d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets qui contient au moins un sommet appartenant à chaque circuit positif de G. Le cardinal minimum d'un PFVS est noté $\tau(G)$.

$\tau(G_1) = 2$, $\tau(G_2) = 2$, $\tau(G_3) = 1$.

Théorème 2.6 Le nombre de points fixes d'un automate à seuil $S = (G, W, b)$ est inférieur à $2^{\tau(G)}$.

Preuve

Soit $T \subseteq V$ un PFVS tel que $|T| = \tau(G)$.

Soit f la fonction qui associe à tout point fixe de S sa projection sur T, i.e.

$$f : \begin{array}{ccl} \{\sigma \mid \sigma \text{ point fixe de } S\} & \to & \{-1; 1\}^{\tau(G)} \\ \sigma & \mapsto & (\sigma_{t_1}, \ldots, \sigma_{t_{\tau(G)}}) \end{array} \text{ où } T = \left\{v_{t_1}; \ldots; v_{t_{\tau(G)}}\right\}$$

Montrons que cette fonction est injective.

Soit σ^1 et σ^2 deux points fixes tels que $f(\sigma^1) = f(\sigma^2)$, i.e. tels que $v_t \in T \Rightarrow \sigma^1_t = \sigma^2_t$. Partitionnons V en
$V^= = \left\{v_j \in V \;\middle|\; \sigma^1_j = \sigma^2_j\right\}$ et $V^{\neq} = \left\{v_j \in V \;\middle|\; \sigma^1_j \neq \sigma^2_j\right\}$.

On a $T \subseteq V^=$.

Supposons par l'absurde $\sigma^1 \neq \sigma^2$ donc $V^{\neq} \neq \emptyset$.

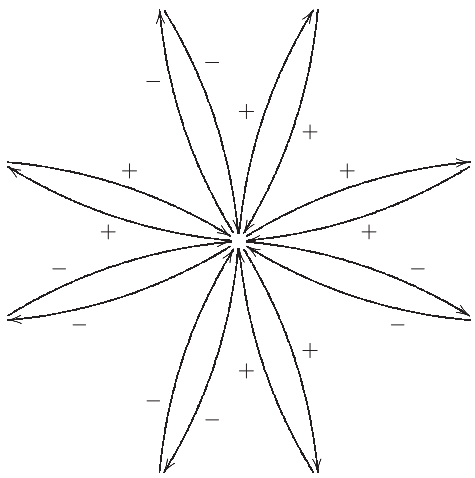
Soit $v_{j_0} \in V^{\neq}$, on peut supposer que $\sigma^1_{j_0} = 1$ et $\sigma^2_{j_0} = -1$. Alors il existe $v_{j_1} \in \Gamma^-_G(v_{j_0})$ tel que $\text{signe}(w_{j_0 j_1})\sigma^1_j = 1$. Sinon on aurait $\sum_j w_{j_0 j}\sigma^1_j = -\sum_j |w_{j_0 j}|$ et donc $\mathbb{1}\left(\sum_j w_{j_0 j}\sigma^1_j - b_{j_0}\right) = -1 = -\sigma^1_{j_0}$, ce qui contredirait le fait que σ^1 est un point fixe.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que de plus $v_{j_1} \in V^{\neq}$. En effet, si $\forall v_j \in \Gamma^-_G(v_{j_0}) \quad \left(\text{signe}(w_{j_0 j})\sigma^1_{j_0} = 1\right) \Rightarrow \left(\text{signe}(w_{j_0 j})\sigma^2_{j_0} = 1\right)$, alors $\sum_j w_{j_0 j}\sigma^2_j \geqslant \sum_j w_{j_0 j}\sigma^1_j$ et donc $\mathbb{1}\left(\sum_j w_{j_0 j}\sigma^2_j - b_{j_0}\right) \geqslant \mathbb{1}\left(\sum_j w_{j_0 j}\sigma^1_j - b_{j_0}\right)$, ce qui contredit le fait que $\sigma^2_{j_0} < \sigma^1_{j_0}$.

On peut donc construire en itérant ce processus une suite de sommets $v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}, \ldots$ dans $V^{\neq}$ telle que $\forall k$ $\text{signe}(w_{j_{k-1} j_k})\sigma^1_{j_k} = \sigma^1_{j_{k-1}}$. Il existe donc dans $V^{\neq}$ un circuit positif c (d'après la proposition 2.3). Mais alors il existe $v_k \in T \cap c$, donc $v_k \in V^= \cap V^{\neq}$, contradiction.

f est donc injective, ce qui prouve que $|\{\sigma \mid \sigma \text{ point fixe de } S\}| \leqslant 2^{\tau(G)}$. ■

Exemple



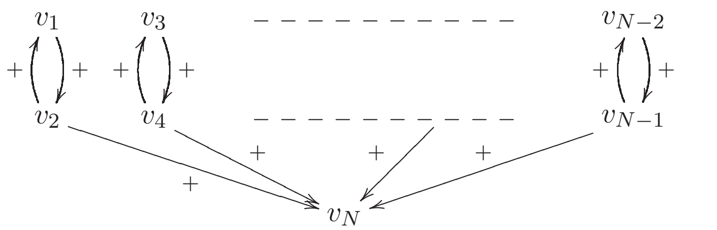
L'étoile symétrique admet au plus $2^1 = 2$ points fixes indépendemment du poids des arcs.

Remarque Pour chaque N impair, on peut construire un automate à seuil $S = (G, W, b)$ de taille N tel que cette borne est atteinte. On pose :

$G = (V, E)$ où $V = (v_1, \ldots, v_N)$

$$E = \bigcup_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \{(v_{2k-1}, v_{2k})\} \cup \{(v_{2k}, v_{2k-1})\} \cup \{(v_{2k}, v_N)\}$$

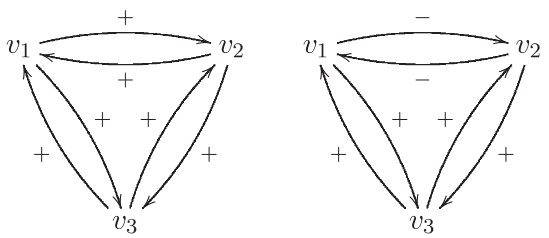
$$W = (w_{ij}) \text{avec } w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_j, v_i) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

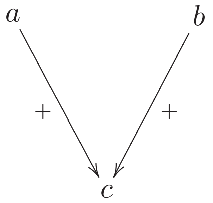


$\tau(G) = \frac{N-1}{2}$.

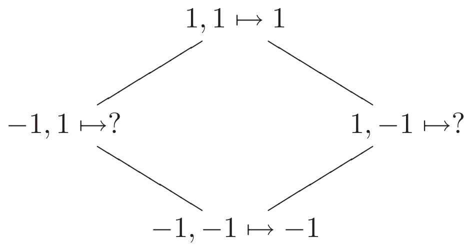
On a clairement $2^{\frac{N-1}{2}}$ points fixes : pour chaque $k \in [\![1, \frac{N-1}{2}]\!]$ on choisit si v_{2k} et v_{2k-1} seront -1 ou 1, la valeur de v_N se déduit de ces choix.

Remarque Le nombre maximum de points fixes d'un automate à seuil n'est pas forcément atteint en maximisant le nombre de circuits positifs.





Dans les deux cas on retrouve le schéma ci contre. Il y a seulement deux fonctions possibles pour cette situation. En effet une fonction de transition partielle f doit être croissante par rapport à l'ordre produit, et non constante. On peut représenter ces contraintes par le schéma suivant (c'est un diagramme de Hasse) :



Si $-1, 1 \mapsto 1$ et $1, -1 \mapsto -1$, alors f ne dépend que de b, donc l'arc (a, c) peut être supprimé, l'automate n'est pas quasi-minimal. Il en va de même si $-1, 1 \mapsto -1$ et $1, -1 \mapsto 1$.

Il n'existe donc que deux possibilités pour f, qui sont le min et le max.

Par conséquent, quelle que soit la fonction globale sur G_1, les deux seuls points fixes possibles sont $(1, 1, 1)$ et $(-1, -1, -1)$, bien que tous les circuits soient positifs.

En choisissant le seuil $b_2 = (-1, -1, 2)$ pour G_2, on obtient trois points fixes qui sont $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$ et $(1, -1, -1)$ bien qu'il y ait moins de circuits positifs.

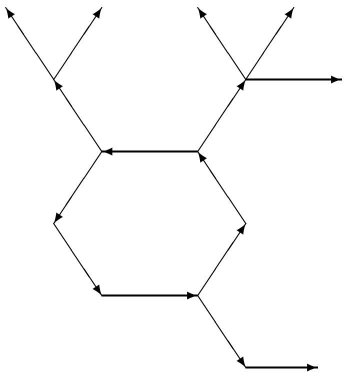
Remarque Ces résultats restent faibles. Il existe une meilleure compréhension des automates à seuil si pour une fonction de transition partielle on n'autorise que le min et le max, i.e. le et et le ou sur $\{0, 1\}$.

2.3.2 cas où le nombre d'arcs de G est petit

Proposition 2.7 *Considérons un automate à seuil $S = (G, W, b)$ tel que $|V| = |E| = N$. Alors S admet un point fixe σ si et seulement si G admet un circuit positif.*

Dans ce cas, les seuls points fixes sont σ et $-\sigma$.

Preuve



D'après les premières propriétés des arbres, G possède un unique cycle. Comme S est minimal, G est de la forme ci contre.

D'après les théorèmes précédents, S admet un point fixe si et seulement si son cycle est positif, les deux possibilités pour un point fixe sur ce cycle déterminent le reste de la configuration.

■

Remarque Un autre axe de recherche est de s'intéresser au problème inverse : on fixe un ensemble de configurations et on cherche les automates à seuil qui admettent exactement cet ensemble de configuration comme ensemble points fixes.

Proposition 2.8 *Soit σ une configuration. Un automate à seuil vérifiant $|V| = |E| = N$ ayant σ comme point fixe est caractérisé par les conditions suivantes :*

1. $w_{ij} = \alpha_{ij}\sigma_i\sigma_j$ *avec* $\forall i, j\ \alpha_{ij} \geqslant 0$ *et* $\forall i\, \exists! j_i$ *tel que* $\alpha_{ij_i} \neq 0$.
2. $-|\alpha_{ij_i}| < b_i \leqslant |\alpha_{ij_i}|$

Preuve

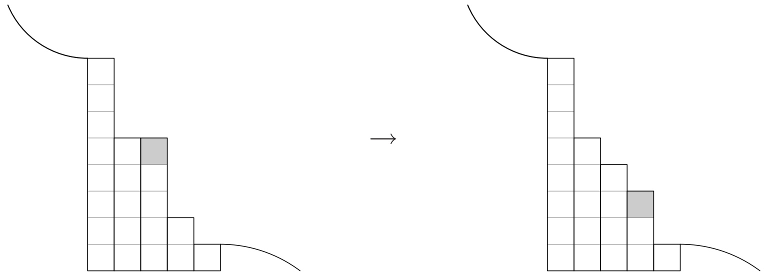
Immédiate d'après la structure du graphe.

■

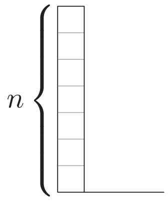
Chapitre 3

Tas de sable

On modélise un tas de sable par une suite finie décroissante d'entiers. Un éboulement élémentaire consiste à faire tomber un grain d'une colonne dans la suivante. Il doit être 2 étages plus haut pour tomber, afin que le résultat soit encore un tas de sable :

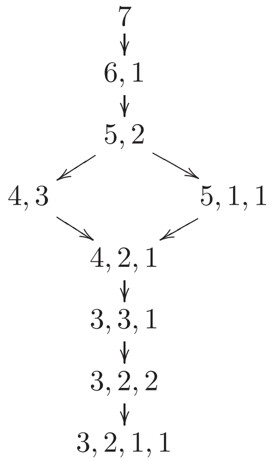


La configuration initiale est une colonne de n grains :



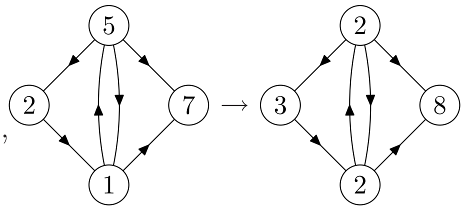
On étudie ce système de façon séquentielle, c'est à dire que l'on choisit à chaque étape une transition possible (la chute d'un grain). On étudie plus particulièrement la structure de l'ensemble des configurations.

Exemple Pour sept grains de sable, on atteint les états ci-contre. On obtient un graphe orienté fini sans circuit (i.e. un ensemble partiellement ordonné).



Remarques

- Cette dynamique peut se ramener à un cas particulier de la dynamique suivante sur les multigraphes orientés : à chaque étape, on choisit un sommet (ici celui du haut) et on déplace un jeton selon chacune de ses arêtes sortantes. (Un multigraphe est un graphe où l'on autorise plusieurs arêtes entre deux sommets).



  La topologie sous-jacente est très simple, chaque colonne interagit uniquement avec ses voisines, on est donc dans un cas linéaire. Cette remarque sera développée au 3.3.
- Cette dynamique des multigraphes est elle-même en cas particulier des réseaux de Petri. Mais Petri s'intéressait à la divergence alors qu'ici chaque évolution du système est finie.
- On peut ajouter une règle de transistion pour obtenir toutes les partitions de n (nombre de grains de sable).
- On retrouve une question fondamentale : voici un objet et des opérations élémentaires. Un algorithme est un chemin dans l'ensemble des configurations.

3.1 Théorie des ordres partiels et treillis

Nous en avons besoin pour étudier les tas de sables. Voici donc une digression mathématique.

3.1.1 Rappels sur les ordres

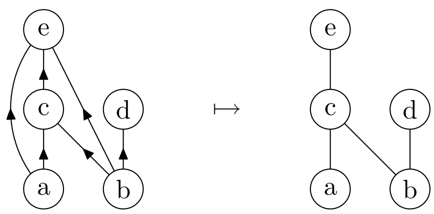
Définitions

- Un ***ordre partiel strict*** (en anglais Partially Ordered SET, ou poset) est un couple $P = (X, <_P)$ où $<_P$ est antiréflexive et transitive (donc antisymétrique). On note $\leqslant_P$ la fermeture réflexive de $<_P$.
- Un ***sous-ordre*** de $P = (X, <_P)$ est $(Y, <_P|_Y)$ où $Y \subseteq X$.
- Si $x \leqslant_P y$ ou $y \leqslant_P x$, x et y sont dits ***comparables***. Sinon on dit qu'ils sont incomparables et on le note $x \mathbin{/\!\!/}_P y$.
- Un ordre tel que tous ses éléments soient deux à deux comparables est un ***ordre total***.
- Une ***chaîne*** est un ensemble d'éléments deux à deux comparables. Une ***antichaîne*** est un ensemble d'éléments deux à deux incomparables.

Remarque Il n'y a pas symétrie entre chaîne et anti-chaîne : la longueur maximale est facile à trouver pour les chaînes, difficile (mais pas NP-complet) pour les anti-chaînes.

3.1.2 Représentation

Diagramme de Hasse : on enlève les arcs que l'on peut obtenir par transitivité ; les flèches sont remplacées par des traits implicitement orientés de bas en haut.



Définition

La ***relation de couverture*** associée à $\leqslant_P$, notée $\prec_P$ est :

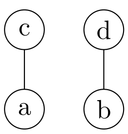
$$x \prec_P y \Leftrightarrow \begin{cases} x <_P y \\ x <_P z \leqslant_P y \Rightarrow y = z \end{cases}$$

y est l'élément «juste après» x.

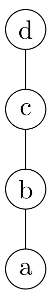
3.1.3 Extentions Linéaires

Définition Une ***extension linéaire*** d'un ordre $P = (X, <_P)$ est un ordre total contenant P : $L = (X, <_L)$ tel que $x <_P y \Rightarrow x <_L y$

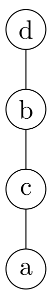
Exemple



admet



et



comme extentions linéaires.

On peut en obtenir une en lisant de bas en haut et de gauche à droite sur une même ligne. On peut les obtenir toutes en prenant un élément minimal x, puis en obtenant récursivement une extention linéaire de $X \setminus \{x\}$.
Remarque Une extension linéaire sur un ordre fini est un ordre topologique du graphe associé.

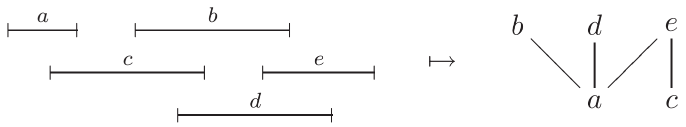
DÉFINITION Le ***graphe de compatibilité*** d'un ordre $P = (X, <_P)$ est le graphe $G(P) = (X, E)$ non orienté dont les arêtes sont les paires d'éléments comparables.

DÉFINITION Un paramètre α sur les ordres est un ***invariant de comparabilité*** si et seulement si $\forall P, P' \quad G(P) \simeq G(P') \Rightarrow \alpha(P) = \alpha(P')$. ($\simeq$ est ici l'isomorphisme de graphes).
Exemples
- hauteur
- nombre d'extensions linéaires si X est fini.

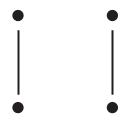
3.1.4 Exemples d'ordres particuliers

ordre d'intervalle

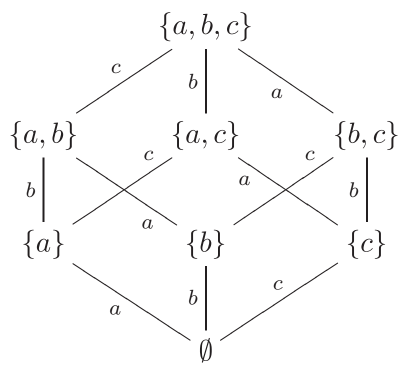
Soit P un ensemble d'intervalles de $\mathbb{R}$, on pose $[a;b] \leqslant_P [c;d] \Leftrightarrow b \leqslant c$. C'est bien un ordre.
Exemple



Remarque On peut montrer que ce sont exactement les ordres ne contenant pas l'ordre ci-contre comme sous-ordre.



inclusion



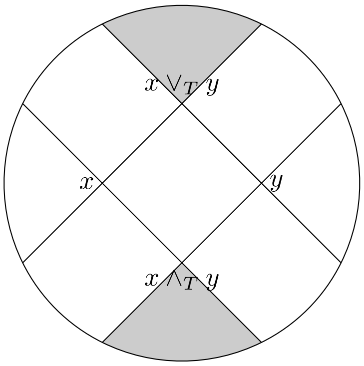
Soit E un ensemble, P l'ensemble de ses parties, on prend $\subset$ pour $<_P$. Le diagramme de Hasse associé à cet ordre est appelé hypercube de dimension $|P|$. Ci-contre un exemple en dimension 3 ($E = \{a, b, c\}$).

3.1.5 Treillis

DÉFINITIONS

Soit $P = (X, <_P)$ un ordre fini et $Y \subseteq X$.

- $x \in X$ est un ***majorant*** de Y si $\forall y \in Y\ y \leqslant_P x$.
- $x \in Y$ est un ***élément maximal*** de Y si $\forall y \in Y\ x \not<_P y$.
- $x \in Y$ est le ***plus grand élément*** de Y si c'est le seul élément maximal.
- On définit de même ***minorant***, ***élément minimal*** et ***plus petit élément***.
- Si l'ensemble des majorants de Y admet un plus petit élément, cet élément est appelé ***borne supérieure*** de Y, notée $\bigvee Y$. La ***borne inférieure*** (plus grand élément des minorants de Y) est notée $\bigwedge Y$.



DÉFINITION Un ordre tel que toute partie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure est un ***treillis***.

Si ces deux opérations sont distributives l'une par rapport à l'autre, on a un ***treillis distributif***.

Notation Dans un treillis T, la borne supérieure de $\{x, y\}$ est notée $x \vee_T y$ et la borne inférieure $x \wedge_T y$. Pour l'ordre d'inclusion on a $\vee \equiv\ \cup$ et $\wedge \equiv \cap$.

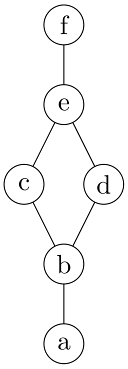
Théorème 3.1 Soit T un ordre fini, il y a équivalence entre :

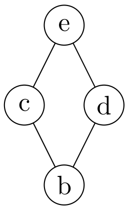
- T est un treillis ;
- T admet un plus grand élément et toute paire d'éléments de T admet une borne inférieure ;
- T admet un plus petit élément et toute paire d'éléments de T admet une borne supérieure.

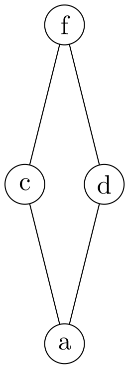
Admis.

DÉFINITION Un ***sous-treillis*** $T' = (X', \leqslant_T)$ du treillis $T = (X, \leqslant_P)$ est un treillis tel que $\forall x, y \in X' \quad x \vee_{T'} y = x \vee_T y$ et $x \wedge_{T'} y = x \wedge_T y$.

Exemple

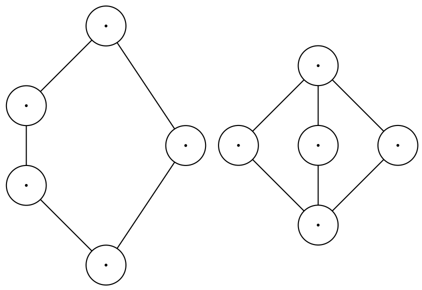


admet


comme sous treillis, mais pas


.

Théorème 3.2 Un treillis T est distributif si et seulement si aucun des deux treillis ci-contre n'en est un sous treillis.



Admis.

DÉFINITION Un treillis T est supérieurement localement distributif si et seulement si $\forall x \in T \quad [x, z]$ est un hypercube, où z est la borne supérieure des éléments couvrant x.

On défninit inférieurement localement distributif de façon analogue.

Remarque Cette notion ne sera utilisée qu'à la fin du chapitre.

Théorème 3.3 Un treillis est distributif si et seulement si il est supérieurement et inférieurement localement distributif.

Admis.

DÉFINITIONS

Soit P $= (X, <_P)$ un ordre.

– Un ***idéal*** de P est $Y \subseteq X$ tel que $\forall y \in Y,\ \forall x \in X \quad x \leqslant_P y \Rightarrow x \in Y$.

– Un ***filtre*** de P est $Y \subseteq X$ tel que $\forall y \in Y,\ \forall x \in X \quad x \geqslant_P y \Rightarrow x \in Y$.

On note $I(P)$ l'ensemble des idéaux de P ordonnés par inclusion.

Théorème 3.4 $I(P)$ est un treillis distributif.

Étapes de la preuve :
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est un treillis distributif.
- $I(P)$ est un sous treillis de $(\mathcal{P}(x), \subseteq)$.
- Un sous treillis d'un treillis distributif est distributif.

3.1.6 Propriétés des ordres et treillis

DÉFINITIONS

Soit $P = (X, <_P)$ un ordre, $x \in X$.
- La ***section commençante*** de x est $\downarrow x = \{y \in X \mid y \leqslant_P x\}$.
- La ***section finissante*** de x est $\uparrow x = \{y \in X \mid x \leqslant_P y\}$.
- Si $P = (X, <_P)$ et $Q = (X, <_Q)$ sont deux ordres et φ une bijection entre P et Q, on dit que φ est un ***isomorphisme d'ordres*** entre P et Q si : $\forall x, y \in X \quad x <_P y \Leftrightarrow \varphi(x) <_Q \varphi(y)$. On dit alors que P et Q sont ***isomorphes***.

Théorème 3.5 Soit P un ordre fini. Notons $A(P)$ l'ensemble de ses antichaînes, ordonné par : $A_1 \leqslant_{A(P)} A_2 \iff (\forall x \in A_1\ \exists y \in A_2 \quad x \leqslant_P y)$.

Alors $I(P)$ et $A(P)$ sont isomorphes.

Idée de la preuve :

L'isomorphisme associe à chaque $i \in I(P)$ l'ensemble $\mathrm{Max}(I)$ de tous ses éléments maximaux. $\mathrm{Max}(I)$ est clairement une antichaîne.

La bijection réciproque associe à $A \in A(P)$ l'idéal $\cup_{x \in A} \downarrow x$.

Remarque Le théorème peut être faux dans le cas infini : si $P = \mathbb{Q}$, l'ordre est total donc l'ensemble des antichaines de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des singletons, il est dénombrable. Par contre l'ensemble de ses idéaux est l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$, il n'est pas dénombrable (isomorphe à $\mathbb{R}$).

DÉFINITIONS

Soit $(T, <_T)$ un treillis.
- $x \in X$ est ***sup-irréductible*** si $|\{y \in X \mid y \prec_T x\}| = 1$.
- $x \in X$ est ***inf-irréductible*** si $|\{y \in X \mid x \prec_T y\}| = 1$.

On note $J(T)$ l'ensemble des sup-irréductibles de T (Join irreductibles) et $M(T)$ l'ensemble des inf-irréductibles (Meet irreductibles).

Remarques
- «join» et «meet» font référence à $\cup$ et $\cap$.
- Cette définition n'est valable que dans le cas discret (qui reste à définir proprement). La définition générale est :
$$\begin{aligned} J(T) &= \{x \in T \mid \forall Y \subseteq T \quad x = \bigvee Y \Rightarrow x \in Y\} \\ M(T) &= \{x \in T \mid \forall Y \subseteq T \quad x = \bigwedge Y \Rightarrow x \in Y\} \end{aligned}$$
- «irréductible» vient du fait que ces éléments ne peuvent être obtenus à partir d'autres par des opérations de borne sup et borne inf.

Théorème 3.6 Soit T un treillis distributif. On a l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \eta : & T & \to & I(J(T)) \\ & a & \mapsto & \{x \in J(T) \mid x \leqslant_T a\} = J(T) \cap \downarrow a \end{array}$$

Admis.

Théorème 3.7 (Birkhoff) Soit P un ordre. On a l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon : & P & \to & J(I(P)) \\ & x & \mapsto & \downarrow x \end{array}$$

Admis.

Il y a donc correspondance : $I(P) = T \longleftrightarrow P = J(T)$.

Remarque Soient a et b deux éléments d'un treillis distributif. On appelle géodésique un chemin de a à b dans le diagramme de Hasse de longueur minimale. L'ensemble des éléments situés sur une géodésique de a à b, ordonné par le sens de parcours de a vers b, est un treillis distributif.

Théorème 3.8 Soit T un treillis distributif. Alors,

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & M(T) & \to & J(T) \\ & y & \mapsto & \wedge(T \setminus \downarrow y) \end{array}$$

est un isomorphisme dont l'application réciproque est $\varphi^{-1}(x) = \vee(T \setminus \uparrow x)$.

Admis.

Théorème 3.9 Soit t un treillis distributif et $y \in M(T)$. Posons $x = \varphi(y)$, y^+ l'unique élément couvrant y, x^- l'unique élément couvert par x.

$$\begin{array}{rccl} \psi_y : & [x^-, y] & \to & [x, y^+] \\ & z & \mapsto & x \vee_T z \end{array}$$

est un isomorphisme d'ordre. L'application réciproque est :

$$\begin{array}{rccl} \psi_y^{-1} : & [x, y^+] & \to & [x^-, y] \\ & z & \mapsto & z \wedge_T y \end{array}$$

De plus, $\forall z \in [x^-, y], \psi_y(z)$ est l'unique élément couvrant z qui est dans $[x, y^+]$.

Admis.

3.2 La dynamique du tas de sable

3.2.1 Partitions

DÉFINITION Une ***partition*** d'un entier positif n est une suite décroissante de n entiers positifs $a = (a_1, ..., a_n)$ telle que $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$. Les a_i sont appellés ***composantes*** de la partition a.

Notation : on désigne par a la partie initiale contenant toutes les parties strictement positives de a. Par exemple
$(4, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = (4, 3, 1, 1)$, notée aussi $(4^1, 3^1, 1^2)$.

DÉFINITIONS

- Le ***dual*** d'une partition $a = (a_1, ..., a_n)$ noté $d(a)$ ou a^* est la partition $(a_1^*, ..., a_n^*)$ où a_i^* est le nombre de composantes de a supérieures ou égales à i.
- (Ordre de dominance) Si a et b sont deux partitions d'un même entier n, on dit que a ***domine*** b, noté $a \geqslant_D b$, si : $\forall j \in [1, n], \sum_{i=1}^{j} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{j} b_i$.
- (Règle de transition) la règle verticale :

  $$(a_1, ..., a_i, a_{i+1}, ..., a_n) \quad \xrightarrow[SPM]{} \quad (a_1, ..., a_i - 1, a_{i+1} + 1, ..., a_n)$$

  peut être appliquée si $a_i - a_{i+1} \geqslant 2$.

DÉFINITION Soit (n) la partition $(n, 0, 0, ..., 0)$. On appelle ***SPM(n)*** (Sand Pile Model) l'ensemble de toutes les partitions que l'on peut atteindre à partir de (n) en itérant la règle verticale.

On définit l'ordre $\leqslant_{SPM}$ comme la fermeture réflexo-transitive de $\xrightarrow[SPM]{}$ (c'est à dire $\xrightarrow[SPM]{*}$ selon les notations de récriture).

3.2.2 Le modèle de Brylawski

le modèle L_B

Remarque $SPM(n)$ ne contient pas toutes les partitions de n. En effet, $(1^9) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ n'est pas dans $SPM(9)$. Pour obtenir toutes les partitions de n, il suffit d'ajouter une règle de transition :

DÉFINITION La ***règle horizontale*** (H) ou glissement est :

$$(a_1, \ldots, (p+1), \underbrace{p, \ldots, p}_{k}, (p-1), \ldots, a_n) \xrightarrow[H]{} (a_1, \ldots, p, \underbrace{p, \ldots, p}_{k}, p, \ldots, a_n)$$

Remarques

- C'est la règle duale de la règle verticale ;
- ce n'est pas une règle locale car k n'est pas borné (elle a donc des répercussions sur le comportement global du tas de sable)

DÉFINITION Le ***modèle de Brylawski*** est représenté par les partitions obtenues à partir de (n) en itérant les règles V et H. Cet ensemble est noté $L_B(n)$.

L'ordre $\leqslant_B$ sur cet ensemble est défini par : $\forall a, b \in L_B(n), a \underset{B}{\longrightarrow} b$ si et seulement si b est obtenu à partir de a en appliquant la règle verticale ou horizontale ; $\leqslant_B$ est la fermeture réflexo-transitive de $\underset{B}{\longrightarrow}$ (ainsi les éléments sont de plus en plus «grands» quand on itère la règle de transistion).

Théorème 3.10 (BRYLAWSKI, 1973) Soient a et b deux partitions quelconques de n. Alors $a \leqslant_D b$ si et seulement si $a \leqslant_B b$. De plus cet ordre est un treillis de plus grand élément (n), de plus petit élément (1^n), et où $(a_1, \ldots, a_n) \wedge_B (b_1, \ldots b_n)$ est défini par $c_j = \min\left(\sum_{i=1}^{j} a_i, \sum_{i=1}^{j} b_j\right) - \sum_{i=1}^{j-1} c_i$, i.e. :

$$a \wedge b = c \iff \forall j \min\left(\sum_{i=1}^{j} a_i, \sum_{i=1}^{j} b_j\right) = \sum_{i=1}^{j} c_i$$

On ne connaît pas de caractérisation simple de $a \vee_B b$.
<u>Exemple</u>

$$\begin{tikzcd}
 & 7 \arrow[d, "V"'] & \\
 & 61 \arrow[d, "V"'] & \\
 & 52 \arrow[dl, "V"] \arrow[dr, "V"'] & \\
43 \arrow[dr, "V"'] & & 511 \arrow[dl, "V"] \\
 & 421 \arrow[dl, "V"] \arrow[ddr, "H"'] & \\
331 \arrow[dd, "V"'] & & \\
 & & 4111 \arrow[ddl, "V"] \\
322 \arrow[dr, "V"'] & & \\
 & 3211 \arrow[dl, "H"] \arrow[dr, "H"'] & \\
2221 \arrow[dr, "H"'] & & 31111 \arrow[dl, "V"] \\
 & 22111 \arrow[d, "H"'] & \\
 & 211111 \arrow[d, "H"'] & \\
 & 1111111 &
\end{tikzcd}$$

Remarques

- Les chemins n'ont plus tous la même longueur.
- Mais entre deux sommets $a \leqslant_V b$, toutes les chaines maximales ont même longueur. Pour montrer cela on utilise la notion d'énergie définie par : $E(a) = \sum_{j=1}^{n} j a_j$. Il est alors facile de vérifier que si $a \underset{V}{\longrightarrow} b$ alors $E(b) = E(a) + 1$.
- Si l'on différencie les grains de sable en les numérotant, la question de savoir quelles sont les permutations que l'on peut obtenir dans la partition finale (1^n) est encore largement ouverte.

Théorème 3.11 (Goles, Kiwi, 1993) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k et k' les uniques entiers tels que $n = \frac{k(k+1)}{2} + k'$ et $0 \leqslant k' \leqslant k$. Alors $SPM(n)$ est un treillis qui est un sous-ordre de $L_B(n)$ et dont le point fixe (le plus petit élément) est : $(k, k-1, \ldots, k'+1, k', k', k'-1, \ldots, 1)$.

Admis.
Remarque Ce n'est pas un sous-treillis en général.

Théorème 3.12 (Goles, Kiwi, 1993) Le point fixe P est obtenu après un nombre de transitions égal à : $C_{k+1}^3 + kk' - C_{k'}^2$.

Admis.

Quelques propriétés sur la longueur des chaînes dans $L_B(n)$

Définition On appelle ***transition modulaire*** l'application de
- la règle V si elle est applicable
- la règle H sinon.

Une ***chaîne modulaire*** est une chaîne constituée uniquement de transitions modulaires.

Théorème 3.13 (Golès, Kiwi, 1993) Toutes les chaînes modulaires entre (n) et (1^n) dans $L_B(n)$ sont de longueur maximale et cette longueur est égale à : $2C_{k+1}^3 + kk' + 1$.

Admis.

Définitions

De façon plus générale, Greene et Kleitman (1986) ont étudié les chaînes entre deux partitions comparables de $L_B(n)$. Ils ont introduit les notions suivantes :
- une ***V-chaîne*** est une chaîne de transitions pour la règle V ;
- une ***H-chaîne*** est une chaîne de transitions pour la règle H ;
- une ***VH-chaîne*** $a_1 \underset{B}{\longrightarrow} a_2 \underset{B}{\longrightarrow} \ldots \underset{B}{\longrightarrow} a_m$ est une chaîne telle que : $\exists j \in [\![1, m]\!] \quad a_1 \underset{V}{\longrightarrow} a_2 \underset{V}{\longrightarrow} \ldots \underset{V}{\longrightarrow} a_j \underset{H}{\longrightarrow} a_{j+1} \underset{H}{\longrightarrow} \ldots \underset{H}{\longrightarrow} a_m$;

- si $a \leqslant_B b$, on dit que b est ***V-accessible*** à partir de a s'il existe une V-chaîne de a à b ;
- si $a \leqslant_B b$, on dit que b est H-accessible à partir de a s'il existe une H-chaîne de a à b.

Théorème 3.14 (Greene, Kleitman, 1986) Toutes les VH-chaînes entre deux sommets fixés de L_B ont la même longueur, qui est maximale.

Admis.

3.2.3 Le modèle IPM (Ice Pile Model)

Définition Soit $k \leqslant n-1$. $IPM(n,k)$ est l'ensemble des partitions que l'on peut atteindre à partir de (n) en itérant la règle V et la règle H_k définie par une restriction de H :

$$(a_1, \ldots, (p+1), \underbrace{p, \ldots, p}_{m<k}, (p-1), \ldots, a_n) \xrightarrow[H_k]{} (a_1, \ldots, \underbrace{p, \ldots, p}_{m+2}, \ldots, a_n)$$

(elle permet d'appliquer H sur des «plateaux» de longueur bornée). On note $\leqslant_k$ l'ordre associé.

Remarques

- $IPM(n, n-1) = L_B(n)$
- $IPM(n, 1) = SPM(n)$
- $a \leqslant_k b \Rightarrow a \leqslant_B b$

Caractérisation des éléments de $IPM(n,k)$

Définition Dans une partition, une suite de m éléments égaux est une m***-suite***.

Théorème 3.15 $a \in IPM(n,k)$ i.e. $a \geqslant_k (n)$, si et seulement si :

1. a ne contient pas de sous-suite de l'une des deux formes suivantes : $\underbrace{p, \ldots, p}_{k+2}$ ou $\underbrace{p, p, \ldots, p}_{k+1}, \underbrace{(p-1), \ldots, (p-1)}_{k+1}$, et
2. entre deux $(k+1)$-suites consécutives $\underbrace{p, \ldots, p}_{k+1}$ et $\underbrace{q, \ldots, q}_{k+1}$ de a, avec $p \geqslant q+2$, il y a au plus $k(p-q-1)-1$ éléments.

Admis. Le cas $k=1$, en comprenant bien ce que signifie la deuxième condition dans ce cas particulier, est un bon exercice.

Théorème 3.16 $IPM(n,k)$ est un sous-ordre de $L_B(n)$.
De plus, $IPM(n,k)$ est un treillis et $\forall a, b \in IPM(n,k), a \wedge_k b = a \wedge_B b$.

Admis.

Relations entre les treillis $IPM(n,k)$, $k \in [\![1, n-1]\!]$

Clairement, pour $k \in [\![1, n-2]\!]$, on a : $IPM(n,k) \subseteq IPM(n,k+1)$.
Soient $a, b \in IPM(n,k)$. On a : $a \wedge_B b = a \wedge_k b$. Comme a et b sont aussi des éléments de $IPM(n,k+1)$, $a \wedge_{k+1} b = a \wedge_B b$ et donc $a \wedge_{k+1} b = a \wedge_k b$. En particulier, si $a \leqslant_k b$ alors $a \leqslant_{k+1} b$ ce qui signifie que $IPM(n,k)$ est un sous-ordre de $IPM(n,k+1)$. D'où le :

Théorème 3.17 Les ensembles ordonnés $IPM(n,k)$ forment une suite croissante de treillis pour la relation de sous-ordre :

$$SPM(n) = IPM(n,1) \trianglelefteq IPM(n,2) \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq IPM(n,n-1) = L_B(n)$$

De plus, $\forall a, b \in IPM(n,k), a \wedge_k b = a \wedge_{k+1} b$.

Puisque $IPM(n,k)$ est un treillis, il admet un plus petit élément. Remarquons que tout entier n peut être écrit de manière unique sous la forme $n = \frac{p(p+1)}{2}k + (p+1)l + q$ avec $l \in [\![1,k]\!]$ et $q \in [\![1,p]\!]$. Posons :

$$\pi = (\underbrace{(p+1),\ldots,(p+1)}_{p},\underbrace{p,\ldots,p}_{k},\ldots,\underbrace{q,\ldots,q}_{k+1},\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{k})$$

Théorème 3.18 π est l'unique point fixe de $IPM(n,k)$.

Admis.

3.3 Chip Firing Games

3.3.1 une structure de treillis

Définitions
Un ***Chip Firing Game***, CFG en abbrégé, est un modèle défini par :
- un multi-graphe orienté, contenant éventuellement des boucles, appelé ***support*** du CFG ;
- une répartition de grains (ou jetons) sur ses sommets, appelée ***configuration initiale***.

La règle de transition est : si un sommet qui n'est pas un puits contient au mois autant de grains qu'il a d'arcs sortants, on peut transférer un grain le long de chacun de ces arcs. On appelle ce procédé ***ébouler*** le sommet.

Un sommet est dit ***instable*** s'il peut être éboulé. L'***espace des configurations*** d'un CFG est le graphe orienté des configurations atteignables à partir de sa configuration initiale en itérant la règle de transition.

Deux CFG sont ***équivalents*** si leurs espaces des configurations sont isomorphes.

Remarque Tout SPM est équivalent à un CFG au sens où pour tout SPM il existe un CFG dont l'espace des configurations est isomorphe : on code les différences entre les colonnes.

Si les sommets de G sont numérotés de 1 à n, on peut représenter le support du CFG par la matrice $M = (m_{ij})$ de taille $n \times n$, où m_{ii} est le nombre d'arcs sortant du sommet i, et $-m_{ij}$ est le nombre d'arcs de j à i. Ainsi $m_{jj} = -\sum_{i \neq j} m_{ij}$.

Cette matrice s'appelle la matrice laplacienne du support du CFG, classique dans la théorie des graphes. Si on la multiplie par un vecteur V on obtient V' tel que $-v'_i$ est la variation du nombre de grains sur i si on éboule chaque sommet j v_j fois.

On supposera par la suite que les puits du graphe sont toujours les sommets de plus grand numéro. On représentera une configuration par le vecteur composé des nombres de grains de chaque sommet.

DÉFINITION Une ***composante fortement connexe fermée*** est une composante fortemment connexe n'ayant pas d'arcs sortant vers l'extérieur.

Lemme *Soit un CFG admettant une composante fortemment connexe non triviale non fermée C.*
Partant d'une configuration initiale o, il n'existe pas de suite non vide d'éboulements des sommets de C telle que l'on retourne en o.

Preuve

Supposons qu'il existe une telle suite S. Soit v_1 le premier élément éboulé de S. Soit v' un sommet de C ayant un arc sortant vers un sommet v'' hors de C. Comme C est une composante fortemment connexe, il y a un chemin qui va de v à v', notons le $(v = v_0, v_1 \ldots, v_k = v')$. Après l'éboulement de v_0, v_1 a au moins un jeton en plus. Il devra donc être éboulé avant de revenir à o. De même pour $v_2, \ldots, v_k$. Donc v_k est éboulé dans S, et il y a alors un jeton qui sort de C. Contradiction.

■

Théorème 3.19 L'espace des configurations d'un CFG sans composante fortemment connexe fermée non triviale peut être partiellement ordonnée par la clôture réflexo-transitive de $\rightarrow$ (la règle de transition).

Idée de la preuve : le graphe des composantes fortemment connexes du support est sans cycle. Comme toute composante fortemment connexe est ici non fermée, on peut utiliser le lemme pour montrer qu'il n'y a pas de circuit dans l'ordre que l'on définit.

Notation Ici encore, les configurations sont de plus en plus «grandes» lorsque l'on itère la règle de transition.

Si s est une suite de transitions, on note $|s|_i$ le nombre d'éboulements du sommet i dans s.

Lemme *Soit un CFG sans composante fortemment connexe fermée non-triviale. Si, partant d'une même configuration, deux séquences d'éboulements s et t aboutissent à la même configuration finale, alors $\forall i, |s|_i = |t|_i$.*

<u>Preuve</u>

Soit $G = (V, E)$ le support du CFG ($|V| = n$). Supposons qu'il existe deux configurations a et b telles qu'il existe deux séquences d'éboulements différentes s et t de a à b qui ne satisfont pas la condition.

Soient $\sigma = (|s|_1, \ldots, |s|_n)$ et $\tau = (|t|_1, \ldots, |t|_n)$; soit M la laplacienne de G.

Pour chaque puits, $|s|_i = |t|_i$. Si G admet des sommets qui ne sont pas des puits, M est de la forme ci-contre. p est donc l'indice du dernier sommet qui n'est pas un puits.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ m_{p1} & \cdots & m_{pp} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $\sigma' = (|s|_1 \ldots |s|_p)$, $\tau' = (|t|_1, \ldots, |t|_p)$, $M' = (m_{ij}), (1 \leqslant i, j \leqslant p)$. $M\sigma = M\tau = a - b$ donc $M(\sigma - \tau) = 0$ donc $M'(\sigma' - \tau') = 0$ donc $det(M') = 0$. Il existe donc une suite d'entiers relatifs $k_1 \ldots k_p$ non tous nuls tels que $\sum_i k_i l_i = (0, \ldots, 0)$ où l_i est la i^{e} ligne de M'.

Soit i_1 tel que $|k_{i_1}|$ soit maximale. $m_{i_1 i_1} = \sum_{j \neq i_1} |m_{j i_1}|$ donc

$$|k_{i_1}| m_{i_1 i_1} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1}}^{n} |k_{i_1}||m_{j i_1}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1}}^{p} |k_{i_1}||m_{j i_1}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1}}^{p} |k_j||m_{j i_1}| \geqslant \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1}}^{p} k_j m_{j i_1} \right|$$

Mais, par définition des k_j, $k_{i_1} m_{i_1 i_1} = -\sum_{j \neq i} k_j m_{j i_1}$. Donc les inégalités sont en fait des égalités : la première dit $\sum_{j=1}^{p} m_{j i_1} = \sum_{j=1}^{n} m_{j i_1}$, c'est à dire qu'il n'y a pas d'arc allant de i_1 vers un puits ; la deuxième signifie $\forall j \quad k_j m_{j i_1} = k_{i_1} m_{j i_1}$, c'est à dire que s'il y a un arc de i_1 vers j, alors $k_j = k_{i_1}$.

Considérons un chemin $(i_1, \ldots, i_q, p)$ allant de i_1 à un puits p (qui existe car il n'y a pas de composante fortemment connexe fermée en dehors des puits). Le long de ce chemin, les k_i sont tous égaux et il n'y a pas d'arcs entre un i_j et un puits. Contradiction.

■

Ce lemme permet de définir la notion de ***shot-vecteur*** $s(a, b)$ de deux configurations $a < b$. La i^{e} composante $s_i(a, b)$ est le nombre d'éboulements de i pour passer de a à b. On note $|s(a, b)| = \sum_i s_i(a, b)$.

Lemme *Soient a et b obtenues à partir de o. Supposons qu'il existe i tel que $s_i(o, a) \leqslant s_i(o, b)$ et $\forall j \neq i, s_j(o, a) \geqslant s_j(o, b)$.*

S'il est possible d'ébouler le sommet i dans b alors il est aussi possible de l'ébouler dans a.

Preuve

Soit M la matrice laplacienne du CFG. Si on peut ébouler i dans b, c'est que $b_i \geqslant d^+(i) = m_{ii}$.

$$\begin{array}{rcl} a_i & = & o_i - s_i(o,a)d^+(i) + \sum_{j \neq i} |m_{ij}| s_j(o,a) \\ & \geqslant & o_i - s_i(o,b)d^+(i) + \sum_{j \neq i} |m_{ij}| s_j(o,b) \quad = \quad b_j \end{array}$$

Donc on peut ébouler i dans a.

■

On peut ainsi caractériser l'ordre entre les configurations issues d'une même configuration :

Théorème 3.20 Si a et b sont issues de o, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow s(o,a) \leqslant s(o,b)$

Preuve

Si $o \leqslant a \leqslant b$ alors pour aller de o à b, il suffit d'aller de o à a puis de a à b, donc $s(o,b) = s(o,a) + s(a,b)$.

Réciproquement, supposons $s(o,a) \leqslant s(o,b)$. Considérons deux séquences d'éboulements, l'une $(c_1 \dots c_r)$ de o vers a, l'autre $(d_1 \dots d_s)$ de o vers b.

Construisons à partir de ces deux séquences une séquence $(e_1 \dots e_t)$ de a vers b.

Comme $s(o,o) = 0 \leqslant s(o,a) \leqslant s(o,b)$, il existe une première configuration d_i telle que $s(o,d_i) \nleqslant s(o,a)$. Soit j le sommet qui est éboulé à ce moment :
$s_j(o,d_i) = s_j(o,d_{i-1}) + 1$ et $\forall k \neq j \quad s_k(o,d_i) = s_k(o,d_{i-1})$.

Comme $s(o,d_{i-1}) \leqslant s(o,a)$, $\forall k \neq j \quad s_k(o,d_i) \leqslant s_k(o,a)$.
Or $s(o,d_i) \nleqslant s(o,a)$ donc $s_j(o,a) < s_j(o,d_i)$. Ainsi d_{i-1} et a satisfont les conditions du lemme précédent donc on peut ébouler j dans a. En itérant le procédé, on obtient b.

■

On peut maintenant étudier la strucuture de l'ensemble des configurations :

Théorème 3.21 L'espace des configurations obtenues à partir d'une configuration initiale o d'un CFG est un treillis. La borne supérieure de deux éléments a et b est définie comme suit :
Si k est le vecteur $(max(s_i(o,a), s_i(o,b)))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors $a \vee b$ est c tel que $s(o,c) = k$.

Preuve

D'après le théorème 3.1 page 43, comme l'ordre est fini et contient un plus petit élément, il suffit de prouver la formule de la borne supérieure. L'ensemble des majorants de a et b est, par le théorème précédent,
$\{d \geqslant o \mid s(o,a) \leqslant s(o,d) \text{ et } s(o,b) \leqslant s(o,d)\}$. La seule difficulté est de montrer que c est bien une configuration atteignable à partir de o. On va montrer que $a \leqslant c$, ie qu'elle l'est à partir de a.

Si $s(o,a)$ et $s(o,b)$ sont comparables, k est $s(o,a)$ ou $s(o,b)$ et le résultat est immédiat. Supposons donc qu'ils ne le sont pas. Il suffit de trouver une configuration a' telle que $a \to a'$ et $s(o,a') \leqslant s(o,c)$. Soit $o \to d_1 \to \cdots \to d_s \to b$ une séquence d'éboulements de o à b. Soit i le premier entier tel que $s(o,d_{i-1}) \leqslant s(o,a)$ et $s(o,d_i) \nleqslant s(o,a)$. De même que pour la preuve précédente, on déduit l'existence d'un a' vérifiant

$$\begin{cases} \forall l \neq j \quad s_l(o,a') = s_l(o,a) \leqslant s_l(o,c) \\ s_j(o,a') = s_j(o,d_i) \leqslant s_j(o,b) \leqslant s_j(o,c) \end{cases}$$

En itérant le processus on en déduit $a \leqslant c$.

■

On va se limiter à l'étude d'une classe plus simple, ayant la propriété suivante : l'ensemble des configurations atteignables est la même que celle de tous les CFG qui convergent. Cette classe est celle où dans tout chemin, chaque somet est éboulé au plus une fois. Le shot-vecteur est donc un vecteur binaire, ou une sous-partie de l'ensemble des sommets. C'est donc plus facile à étudier.

3.3.2 les CFG simples

DÉFINITIONS

- Un CGF est ***convergent*** si toute suite de transitions à partir de la configuration initiale est finie.
- Un CFG convergent est dit ***simple*** si dans toute avalanche, aucun sommet n'est éboulé plus d'une fois.

Théorème 3.22 Tout CFG convergent est équivalent à un CFG simple.

Idée de la preuve :

Soit C un CFG convergent de support $G = (V,E)$ de configuration initiale o qui n'est pas simple. Il existe donc un sommet a qui est éboulé plus d'une fois lors d'une avalanche maximale. Nous allons construire un CFG C' équivalent à C dans lequel le sommet a est remplacé par deux sommets a_0 et a_1. Ils seront éboulés tour à tour dans C' à chaque fois que a est éboulé dans C. Les sommet a_0 et a_1 seront donc éboulés strictement moins souvent que a. En itérant ce procédé on obtiendra finalement un CFG simple.

Notation Dans la suite, pour $s \in E$ on note $l(x)$ le nombre de boucles sur x et on désigne par $d^{>}(x)$ le nombre d'arcs sortants de x qui ne sont pas des boucles : $d^{>}(x) = d^{+}(x) - l(x)$. De même on définit $d^{<}(x) = d^{-}(x) - l(x)$.

Preuve

Appelons N l'entier égal au double du nombre total de grains dans C.

On définit C' de support $G' = (V', E')$ par :

- $V' = V \setminus \{a\} \cup \{a_o, a_1\}$, avec $a_0, a_1 \notin V$ (sommets «frais»).
- E' :
  - $\forall x, y \in V \setminus \{a\}$, si E contient n arcs xy, alors E' contient $2n$ arcs xy ;
  - pour chaque arc $xa \in E$ où $x \neq a$, E' contient les arcs xa_0 et xa_1 ;
  - pour chaque boucle aa dans E, E' contient une boucle a_0a_0 et une boucle a_1a_1 ;
  - pour chaque arc $ax \in E$ où $x \neq a$, E' contient deux arcs a_0x et deux arcs a_1x ;
  - E' contient $N - d^{>}(a)$ arcs a_0a_1 et autant d'arcs a_1a_0.

La configuration initiale o' est définie par :

- $o'(a_0) = o(a) + N$,
- $o'(a_1) = o(a)$,
- $\forall x \neq a_0, a_1 \quad o'(x) = 2o(x)$.

Soit $2C$ le CFG obtenu à partir de C en doublant la configuration initiale de tous les sommets ainsi que le nombre d'arcs entre chaque paire de sommets. $2C$ est clairement équivalent à C. Nous allons voir que C' est équivalent à $2C$ donc à C.

À l'exception des deux sommets a_0 et a_1, C' est identique à $2C$ et se comporte de la même façon : pour tous les sommets à l'exceptions de a_0 et a_1, les prédécesseurs et les successeurs de chaque sommet sont les mêmes dans C' et $2C$.

Donc si nous pouvons montrer que les éboulements de a_0 et a_1 ont bien lieu à tour de rôle, chacun prenant la place d'un éboulement de a, nous pouvons en déduire le résultat.

Nous allons montrer qu'il existe une bijection entre les ensembles de séquences d'éboulements de $2C$ et C', et que cette bijection conserve la relation de couverture et est donc un isomorphisme de treillis. Cette bijection vérifiera la propriété suivante : soit s une avalanche de $2C$ qui mène à une configuration σ et soit s' son image par la bijection, qui mène à la configuration σ'. Alors σ et σ' vérifient la propriété 1 et l'une des propriétés 2 et 2' suivantes :

1 $\forall x \neq a_0, a_1 \quad \sigma'(x) = \sigma(x)$;

2 $\sigma'(a_0) = N + \frac{\sigma(a)}{2}$ et $\sigma'(a_1) = \frac{\sigma(a)}{2}$

2' $\sigma'(a_0) = \frac{\sigma(a)}{2}$ et $\sigma'(a_1) = N + \frac{\sigma(a)}{2}$.

La bijection considérée consiste simplement à remplacer dans s la première occurence de a par a_0, la seconde par a_1, et ainsi de suite en alternant

a_0 et a_1. Les coniguraitions initiales de $2C$ et C' qui correspondenet à l'avalanche vide satisfont 1 et 2.

Soit s une avalanche de $2C$ et s' l'avalanche image de s dans C' et soient σ et σ' les configurations atteintes. Supposons sans perte de généralité que σ et σ' vérifient 1 et 2. Soit x un sommet instable dans σ.

- Si $x \neq a$ alors x est également instable dans σ' par la propriété 1 et son éboulement conduit à des configurations qui vérifient toujours 1 et 2.
  En effet les arcs sortants de x sont les mêmes dans C' et $2C$ à l'exceptions des arcs vers a. Si x donne n grains à a dans $2C$ alors il va donner $\frac{n}{2}$ grains à a_0 et autant à a_1 dans C'.
- Si $x = a$ alors a_0 est instable dans C' dans la configuration σ'. En effet, si a contient n grains dans $2C$, a_0 en contient $N + \frac{n}{2}$ dans C' d'après 1. Or le degré sortant de a_0 dans C' est $l(a) + 2d^{>}(a) + (N - d^{>}(a)) = N + d^{+}(a)$ et le degré sortant de a dans $2C$ est $2d^{+}(a)$. Ainsi grâce à 1, a_0 est instable dans C' si et seulement si a l'est dans $2C$.

Soient σ_1 et σ'_1 les configurations obtenues respectivement à partir de σ et σ' en éboulant respectivement a et a_0. On vérifie aisément que σ_1 et σ'_1 vérifient 1 et 2'. Les avalanches de C' et $2C$ sont donc en bijection et la relation de couverture est préservée, ce qui termine la preuve

■

Remarques

- On peut par ces transformations augmenter exponentiellement la taille du CFG de départ.
- Nous pouvons nous limiter à l'étude des CFG simples.

On peut mainteant voir le shot-vecteur d'une configuration comme un ensemble puisque chaque sommet est éboulé au plus une fois :

Définition Le ***shot-set*** d'une configuration est l'ensemble des sommets éboulés pour atteindre cette configuration à partir de la configuration initiale.

Corollaire*L'espace des configurations d'un CFG simple est isomorphe à l'ensemble de ses shot-sets ordonné par inclusion.*

Théorème 3.23 L'espace des configurations d'un CGF simple est un treillis supérieurement localement distributif.

<u>Preuve</u>

Nous savons que cet espace est un treillis, montrons qu'il est supérieurement localement distributif (en abbrégé : SLD).

Remarqons que $s(o, a \vee b) = s(o, a) \cup s(o, b)$. Soit σ une configuration de shot-set s. Notons $x_1 \dots x_k$ les sommets instables de cette configuration.

L'éboulement de n'importe lequel de ces sommets n'empêche pas l'éboulement d'un autre sommet. Donc tout sous-ensemble de $s \cup \{x_1 \dots x_k\}$ est un shot-set valide. Comme le shot-set de la borne supérieure de toutes les couvertures supérieures de σ est $s \cup \{x_1 \dots x_k\}$, l'intervalle entre σ et la borne supérieure de ses couvertures supérieures est un hypercube, ce qui prouve le résultat.

■

Corollaire*L'espace des configurations de tout CFG convergent est un treillis SLD.*

Définition $L(CFG)$ (L pour lattice, treillis en anglais) est la classe des treillis qui sont des espaces de configurations de CFG convergents.
Remarque On se pose maintenant une question classique : cette classe est-elle stable par une certaine opération ? Il existe d'autres opérations que celle considérée ici par rapport auxquelles cette classe est stable.

Théorème 3.24 Soit L un treillis de $L(CFG)$. Alors tout intervalle de L est aussi dans $L(CFG)$.

Preuve

Rappel : tout intervalle d'un treillis SLD est un treillis SLD. C'est une condition nécessaire au théorème.

Soit $L \in L(CFG)$ et soit C un CFG simple engendrant L. Soit a le plus grand élément de L. Alors tout intervalle de la forme $[\sigma, a]$ (où σ est une configuration valide de C) est trivialement aussi dans $L(CFG)$: il est engendré par le CFG de support le support de C et de configuration initiale σ.

Soit o la configuration initiale de C. Considérons un intervalle de la forme $[o, \sigma]$. Comme C est simple, on peut partitionner l'ensemble des sommets du support $G = (V, E)$ en deux ensembles $s(o, \sigma)$ et $V \setminus s(o, \sigma)$. L'intervalle $[o, \sigma]$ est alors l'espace des configurations du CFG obtenu à partir de C en supprimant tous les arcs sortant des sommets de $V \setminus s(o, \sigma)$ de sorte qu'ils ne puissent jamais être éboulés et de configuration initiale o.

Soit un intervalle de la forme $[\sigma, \sigma']$. Comme $[o, \sigma'] \in L(CFG)$, $[\sigma, \sigma'] \in L(CFG)$. D'où le résultat.

■

Théorème 3.25 Tout treillis distributif est dans $L(CFG)$.

Preuve

Soit L un treillis distributif et soit $G = (J_L, \prec)$ le graphe de la relation de couverture de l'ordre induit par les sup-irréductibles de L.

On définit le CFG C comme suit.

- Le support est $H = (V, E)$ où $V = J_L \cup \{\perp\}$ ($\perp$ est un nouveau sommet) et pour chaque sommet x les arcs sortants de x dans E sont les arcs sortants de x dans G auxquels ont ajoute :
  - $d_G^-(x) - d_G^+(x)$ arcs de x vers $\perp$ si $d_G^-(x) > d_G^+(x)$;
  - un arc de x vers $\perp$ si x est isolé dans G.

  On remarque que dans H, le degré entrant est inférieur ou égal au degré sortant.
- La configuration initiale o est $\forall x \in V \quad o(x) = d_G^+(x) - d_G^-(x)$.

C vérifie les propriétés suivantes :

- Chaque sommet en dehors de $\perp$ peut être éboulé une et une seule fois. En effet le nombre total de grains qui sortent d'un sommet v lors d'une avalanche maximale de C est exactement $d^+(v)$: c'est vrai pour les sources. Soit x un sommet pour lequel la propriété est vérifiée pour chacun de ses prédécesseurs. Les prédécesseurs immédiats de x peuvent donc être éboulés une seule fois, apportant à x exactement le nombre de grains dont il a besoin pour être éboulé une fois.
- Un sommet x ne peut être éboulé avant que tous ses prédécesseurs ne l'aient été.

Par conséquent, le shot-set de toute configuration est un idéal de G, réciproquement, tout idéal de G est un shot-set valide pour C. Donc l'espace des configurations de C est isomorphe au treillis des idéaux de G, qui est isomorphe à L.

■

Ainsi $L(CFG)$ est entre la classe des treillis distributifs et celle des treillis SLD. Ce cas est peu courant parmi les classes de treillis. Il existe des treillis SLD qui ne sont pas espace des configurations d'un CFG. Le plus petit contre-exemple a 24 sommets.

Chapitre 4

En guise de conclusion

Tout ceci reste une approche très partielle de la modélisation des systèmes complexes.

Le chapitre 1 sur les automates cellulaires a étudié des questions de calculabilité. Le chapitre 2 sur les automates à seuils s'est intéressé aux points fixes de systèmes dynamiques parallèles synchrones. Le chapitre 3 sur les tas de sables a considéré un système séquentiel et des propriétés de l'espace des configurations.