Examen de Sémantique des Jeux

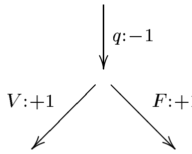
Jeudi 4 Avril 2002

Exercice: On appelle `bool` le jeu d'arbre défini par

$$M_{\texttt{bool}} = \{q, V, F\} \quad \lambda_{\texttt{bool}}(q) = -1 \quad \lambda_{\texttt{bool}}(V) = \lambda_{\texttt{bool}}(F) = +1$$

$$P_{\texttt{bool}} = \{\epsilon, q, q \cdot V, q \cdot F\}$$

Pour indication, on représentera le jeu `bool` par l'arbre étiqueté:



et la stratégie "négation" $\texttt{bool} \multimap \texttt{bool}$ par l'ensemble de ses parties maximales:

bool	$\multimap$	bool
		q
q		
V		
		F

bool	$\multimap$	bool
		q
q		
F		
		V

ou de manière compacte:

bool	$\multimap$	bool
		q
q		
x		
		$\neg x$

Question 1. Représenter comme des arbres étiquetés les jeux suivants:

- $\texttt{bool} \otimes \texttt{bool}$,
- $\texttt{bool} \multimap \texttt{bool}$,
- $(\texttt{bool} \otimes \texttt{bool}) \multimap \texttt{bool}$.

Question 2. Représenter de manière compacte les stratégies suivantes:

- l'identité $\texttt{bool} \multimap \texttt{bool}$
- l'identité $(\texttt{bool} \otimes \texttt{bool}) \multimap (\texttt{bool} \otimes \texttt{bool})$,
- l'évaluation $\texttt{bool} \otimes (\texttt{bool} \multimap \texttt{bool}) \multimap \texttt{bool}$,
- l'opérateur "et-gauche" $\wedge_{\mathbf{g}} : (\texttt{bool} \otimes \texttt{bool}) \multimap \texttt{bool}$,

- l'opérateur "et-droite" $\wedge_{\mathbf{d}}$: $(\mathtt{bool} \otimes \mathtt{bool}) \multimap \mathtt{bool}$,
- un "goûteur de et" $\mathbf{G}$: $((\mathtt{bool} \otimes \mathtt{bool}) \multimap \mathtt{bool}) \multimap \mathtt{bool}$.

On rappelle qu'un "goûteur" $\mathbf{G}$ est une stratégie qui définit, par post-composition avec les stratégies $\wedge_{\mathbf{g}}$ et $\wedge_{\mathbf{d}}$, les stratégies suivantes de `bool`:

$$\wedge_{\mathbf{g}}; \mathbf{G} = \{\epsilon, q \cdot V\} \qquad \wedge_{\mathbf{d}}; \mathbf{G} = \{\epsilon, q \cdot F\}$$

Problème: On étudie ici une caractérisation des stratégies innocentes dans les jeux à pointeurs, qui évite le concept de "vue". On rappelle qu'une *arène* est un triplet $A = (M_A, \lambda_A, \vdash_A)$ où

- M_A est un ensemble dont les éléments sont appelé les *coups* de A ; on désigne par M_A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet M_A,
- $\lambda_A : M_A \to \{+1, -1\}$ associe une polarité $+1$ (Joueur) ou -1 (Opposant) à chaque coup,
- $\vdash_A \subset M_A \times M_A$ est une relation binaire, dite de *justification*, sur les coups de A.

On dit qu'un coup m justifie un coup n lorsque $m \vdash_A n$. Un coup de A qu'aucun coup ne justifie est appelé *initial*. Comme dans le cours, on impose qu'une arène vérifie les deux propriétés suivantes:

1. si $m \vdash_A n$, alors $\lambda_A(m) = -\lambda_A(n)$ (alternance),
2. tous les coups initiaux sont polarisés -1 (Opposant commence).

On rajoute ici une troisième condition:

3. si $m \vdash_A n$ et $m' \vdash_A n$, alors $m = m'$ (propriété d'arbre)

Nous noterons P_A l'ensemble des ***parties*** sur l'arène A. Ici, une *partie* est définie comme tout mot $s \in M_A^*$ tel que

- s est un mot *sans répétition* (cad. le même coup de A n'est jamais joué plus d'une fois),
- tout coup n apparaissant dans s est soit initial, soit justifié par un coup m le précédant dans le mot, cad. tel que $m \vdash_A n$ et $s = s_1 \cdot m \cdot s_2 \cdot n \cdot s_3$ pour certains mots $s_1, s_2, s_3 \in M_A^*$.

Donc, contrairement à ce que nous avons vu en cours, les parties sont ici sans répétition possible de coups, et nous ne leur imposons aucune condition d'alternance.

Question 1. Soit une partie *alternée* s de P_A. On appelle *P-vue* de s le mot $\ulcorner s \urcorner$ sur l'alphabet M_A, défini comme suit:

$$
\begin{array}{lll}
\ulcorner s \cdot m \cdot n \urcorner = \ulcorner s \cdot m \urcorner \cdot n & & \text{si } \lambda_A(n) = +1, \\
\ulcorner s \cdot m \cdot t \cdot n \urcorner = \ulcorner s \urcorner \cdot m \cdot n & & \text{si } m \text{ justifie } n, \text{ et } \lambda_A(n) = -1, \\
\ulcorner s \cdot n \urcorner = n & & \text{si aucun coup de } s \text{ ne justifie } n, \text{ et } \lambda_A(n) = -1, \\
\ulcorner \epsilon \urcorner = \epsilon & & \text{où } \epsilon \text{ est le mot vide.}
\end{array}
$$

Montrer que si $s \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot t$ est une partie alternée de P_A, telle que

- $\lambda_A(m_1) = \lambda_A(m_2) = -1$ et $\lambda_A(n_1) = \lambda_A(n_2) = +1$,
- $\neg(n_1 \vdash_A m_2)$ et $\neg(m_1 \vdash_A n_2)$,

alors

1. $s \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot t$ est une partie alternée de P_A,
2. $\ulcorner s \cdot m_2 \cdot n_2 \urcorner = \ulcorner s \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \urcorner$,
3. $\ulcorner s \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot t \urcorner = \ulcorner s \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot t \urcorner$ si le mot t n'est pas vide.

Question 2. On appelle *stratégie* de A un ensemble $\sigma \subset P_A$ de parties *alternées* de longueur paire, telles que:

- σ est clos par préfixe de longueur paire:
$$\forall s \in P_A, \forall m, n \in M_A, \qquad s \cdot m \cdot n \in \sigma \Rightarrow s \in \sigma$$
- σ est déterministe
$$\forall s \in P_A, \forall m, n, n' \in M_A, \qquad s \cdot m \cdot n \in \sigma \text{ et } s \cdot m \cdot n' \in \sigma \quad \Rightarrow \quad n = n'$$

Une stratégie σ est ***innocente*** lorsque $\forall s, t \in P_A, \forall m, n \in M_A$,

$$s \cdot m \cdot n \in \sigma,\ t \in \sigma,\ t \cdot m \in P_A,\ \ulcorner s \cdot m \urcorner = \ulcorner t \cdot m \urcorner \ \Rightarrow\ t \cdot m \cdot n \in \sigma$$

Une stratégie σ est ***permutante*** lorsque $\forall s_1, s_2 \in M_A^*$, $\forall m, n, m', n' \in M_A$,

$$s_1 \cdot m \cdot n \cdot m' \cdot n' \cdot s_2 \in \sigma \text{ et } \neg(n \vdash_A m') \ \Rightarrow\ \neg(m \vdash_A n') \text{ et } s_1 \cdot m' \cdot n' \cdot m \cdot n \cdot s_2 \in \sigma$$

Montrer que toute stratégie innocente est permutante.

Question 3. Une stratégie σ est ***luxuriante*** lorsque $\forall s \in P_A, \forall m, n, n' \in M_A$,

$$s \cdot m \cdot n \in \sigma,\ s \cdot m' \cdot n' \in \sigma,\ s \cdot m \cdot n \cdot m' \in P_A \ \Rightarrow\ s \cdot m \cdot n \cdot m' \cdot n' \in \sigma$$

Montrer que toute stratégie innocente est luxuriante.

Question 4. Montrer que lorsque la stratégie σ est permutante, on a

$$\forall s \in P_A, \quad s \in \sigma \ \Rightarrow\ \ulcorner s \urcorner \in \sigma$$

Question 5. Montrer que lorsque la stratégie σ est luxuriante, on a

$$\forall s \in P_A, \forall m, n \in M_A, \quad s \in \sigma,\ s \cdot m \in P_A, \ulcorner s \cdot m \urcorner \cdot n \in \sigma \ \Rightarrow\ s \cdot m \cdot n \in \sigma$$

Question 6. Déduire de 3. 4. et 5. qu'une stratégie est innocente ssi elle est permutante et luxuriante.