Examen de Sémantique des Jeux, DEA Programmation.
Durée 2 heures 4–4–2001.

Stratégies non-déterministes

On note $s \leq s'$ l'ordre préfixe sur les parties.

A. Une stratégie non-déterministe sur l'arène A, ou plus brièvement une stratégie nd sur A, est définie par deux composants (T_σ, D_σ).

Le premier composant T_σ est un sous-ensemble non-vide de $\mathcal{L}_A^{\mathsf{even}}$ clos par préfixes pairs (i.e. $sab \in T_\sigma \Rightarrow s \in T_\sigma$) qu'on appelle l'ensemble des *traces* de σ.

On définit *l'image* de σ en $sa \in \mathcal{L}_A^{\mathsf{odd}}$ par $\mathsf{rng}_\sigma(sa) = \{b \in M_A \mid sab \in T_\sigma\}$.

Le second composant D_σ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}_A^{\mathsf{odd}}$ qu'on appelle les *divergences* de σ et qui vérifie:

(d1) $\mathsf{rng}_\sigma(sa) = \varnothing \Rightarrow \exists d \in D_\sigma : d \leq sa$

(d2) $sa \in D_\sigma \Rightarrow s \in T_\sigma$

(d3) $\mathsf{rng}_\sigma(sa)$ infinite $\Rightarrow \exists d \in D_\sigma : d \leq sa$

1. Commenter les conditions (**d1**) et (**d3**).

2. Montrer qu'une stratégie déterministe ordinaire peut être vue comme une stratégie nd.

B. On va maintenant étendre, en deux temps, la notion de composition ordinaire aux stratégies nd. On notera:

$$T_\sigma \| T_\tau = \{u \in \mathsf{int}(A, B, C) \mid u \restriction A \to B \in T_\sigma \wedge u \restriction B \to C \in T_\tau\}.$$

3. Soient $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$, on définit tout d'abord:

$$\begin{array}{rcl} D_1(\sigma, \tau) & = & \{u \in \mathsf{int}(A, B, C) \mid u \restriction A \to B \in T_\sigma \wedge u \restriction B \to C \in D_\tau\} \cup \\ & & \{u \in \mathsf{int}(A, B, C) \mid u \restriction A \to B \in D_\sigma \wedge u \restriction B \to C \in T_\tau\} \end{array}$$

Montrer (en utilisant l'automate des états d'une interaction) que

$$D_1(\sigma, \tau) \restriction A \to C \subset \mathcal{L}_{A \to C}^{\mathsf{odd}}.$$

4.a. En prenant $A = \mathbf{1}$, $B = \mathbf{B}$ et $C = \mathbf{N}$, construire deux stratégies nd σ et τ (on pourra même prendre τ déterministe) telles que $(T_\sigma \| T_\tau \restriction A \to C, D_1(\sigma, \tau) \restriction A \to C)$ ne vérifie pas (**d3**).

4.b. Faire de même pour (**d1**).

5. Le problème vient des éventuelles interactions infinies dont la projection externe (sur $A \to C$) est cependant finie et qu'on notera $\mathsf{int}_\infty(A, B, C)$. On définit donc:

$$D_2(\sigma, \tau) \quad = \quad \{u \in \mathsf{int}_\infty(A, B, C) \mid \forall u' \in \mathsf{int}(A, B, C) : u' < u \Rightarrow u' \leq T_\sigma \| T_\tau\}$$

Montrer que cette fois $(T_\sigma \| T_\tau \upharpoonright A \to C, D_1(\sigma,\tau) \cup D_2(\sigma,\tau) \upharpoonright A \to C)$ est bien une stratégie nd (on s'interessera tout particulièrement à (**d3**)).

C. On définit un pré-ordre sur les stratégies nd par $\sigma \leq \tau$ si

(o1) $T_\sigma \subset T_\tau$

(o2) $\forall e \in D_\tau \exists d \in D_\sigma : d \leq e$

(o3) $sab \in T_\tau \setminus T_\sigma \Rightarrow \exists d \in D_\sigma : d \leq sab.$

On notera $\sigma \leq' \tau$ si les seules deux premières conditions (**o1**) et (**o2**) sont réalisées.

6. On se place dans l'arène **B** et on pose $\top_{\mathbf{B}} = (\{\epsilon, \mathsf{qtt}, \mathsf{qff}\}, \varnothing)$; montrer que $\mathsf{tt} \leq' \top_{\mathbf{B}}$ et $\mathsf{tt} \not\leq \top_{\mathbf{B}}$. En déduire en prenant $A = \mathbf{1}$ et $B = C = \mathbf{B}$, que la composition définie en 5. ne respecte pas $\leq'$.

7. Montrer que la composition respecte $\leq$.