Examen de Sémantique des Jeux, DEA Programmation.
Durée 2 heures 5–4–2001.

1 Inversion à gauche.

On se place dans la catégorie des stratégies filaires déterministes et on se donne A une arène et $\sigma : A \Rightarrow \mathbf{N}$. L'objet de l'exercice est de trouver une condition suffisante sur σ pour que *dans* cette catégorie il existe un inverse à gauche de σ, c'est-à-dire une solution x à l'équation:

$$x\,;\sigma = \mathsf{Id}_{\mathbf{N}}.$$

On notera: $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des suites pointées sur A; $\sigma_\star$ l'ensemble des fils de σ; $x\|\sigma$ l'ensemble des interactions de x avec σ, *i.e.* l'ensemble des $u \in \mathsf{int}(\mathbf{N}, A, \mathbf{N})$ telles que $u \restriction \mathbf{N} \Rightarrow A \in x$ et $u \restriction A \Rightarrow \mathbf{N} \in \sigma$.

1. Montrer que si l'équation a une solution, σ réagit à la question initiale q_0 dans $\mathbf{N}$ par un coup initial dans A qu'on notera q'.

2. Montrer qu'une stratégie x filaire est solution ssi:

$$\forall n\ \exists u \in x\|\sigma :\ u \restriction \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathsf{q}_0\mathsf{q}_1\mathsf{nn} \wedge u \restriction A \Rightarrow \mathbf{N} \in \sigma_\star$$

3. Soient x une solution et $u \in x\|\sigma$ telle que $u \restriction \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathsf{q}_0\mathsf{q}_1\mathsf{nn}$ pour un certain n. Montrer que: $\exists t, t' \in \mathcal{S}_A :\ u = \mathsf{q}_0 t \mathsf{q}_1 \mathsf{n} t' \mathsf{n}$. (On pourra utiliser l'automate des états successifs d'une interaction.)

4. On suppose maintenant: $\forall n \exists s_n \in \mathcal{S}_A :\ \mathsf{q}_0\mathsf{q}' s_n \mathsf{n} \in \sigma$ et on définit un ensemble de suites pointées dans $\mathbf{N} \Rightarrow A$ par $y = \{\mathsf{q}'\mathsf{q}_1\mathsf{n} s_n\}$.

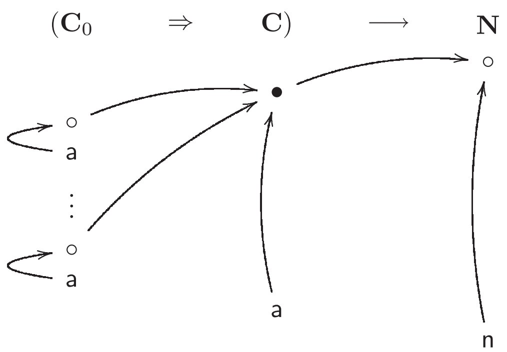
4.a) Montrer que les suites pointées de y sont des parties dans $\mathcal{L}^{\mathsf{even}}_{\mathbf{N}\Rightarrow A}$.

4.b) On suppose de plus que s_n est *sans coups initiaux*; montrer que les parties dans y sont des fils et que la stratégie filaire engendrée par y est déterministe. On la notera x.

4.c) Montrer que x est une solution.

5.a) Construire un inverse à gauche de catch suivant cette méthode.

5.b) Même question pour la stratégie cnt dont les fils pairs maximaux sont:



où n est le nombre de questions posées par O dans $\mathbf{C}_0$ et l'on a noté respectivement $\circ$ et $\bullet$ les questions d'O et P. Quel programme d'IA la stratégie obtenue interprète-t-elle ?

2 Composition probabiliste.

On se place dans la catégorie des stratégies probabilistes filaires. Ci-joint un bref rappel de cours: une préstratégie σ sur l'arène A est une fonction σ : $\mathcal{L}_A^{\mathsf{even}} \to [0, \infty]$. On dit qu'elle est une stratégie probabiliste si de surcroît:

(**p1**) $\sigma(\varepsilon) = 1$;

(**p2**) si $sa \in \mathcal{L}_A^{\mathsf{odd}}$ alors $\sigma(s) \geq \sum_b \sigma(sab)$.

L'objet de cet exercice est de prouver que la condition (**p2**) est bien préservée par la formule de composition:

$$\sigma;\tau(s) = \sum_{u \in \mathsf{wit}_B(s)} \sigma(u \upharpoonright A, B) \cdot \tau(u \upharpoonright B, C)$$

avec la notation $u \in \mathsf{wit}_B(s)$ pour u une interaction témoin de s.

1. Montrer que $\mathsf{coin} : \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{B}$ vérifie bien les deux conditions ci-dessus où coin est le dé à deux faces, *i.e.* assigne la probabilité $\mathsf{coin}(s) = (1/2)^{|s|/2}$ aux parties $s = \mathsf{q}b_1 \cdots \mathsf{q}b_n$ où chaque $b_i \in \{\mathsf{tt}, \mathsf{ff}\}$ pointe sur la question qui le précéde immédiatement (et 0 aux autres).

2. Soit τ une stratégie déterministe sur $\mathbf{B} \Rightarrow A$.

2.a) Montrer qu'un témoin d'une partie s de $\mathsf{coin} ; \tau$ n'est autre qu'une partie $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{B} \Rightarrow A}^{\mathsf{even}}$, telle que $u \upharpoonright A = s$ et $u \upharpoonright \mathbf{B} \in \mathcal{L}_{\mathbf{B}}^{\mathsf{even}}$.

2.b) Montrer qu'une interaction v entre coin et τ est un témoin de sab ssi $v = uatb$ pour un certain témoin u de s et un certain $t \in \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$.

2.c) En déduire que $\mathsf{coin} ; \tau$ est une stratégie probabiliste sur $\mathbf{1} \Rightarrow A$. On cherchera en outre une condition sur τ pour que (**p2**) soit une égalité.

3. Expliquer informellement pourquoi coin est un oracle pour les stratégies probabilistes, *i.e.* une préstratégie σ sur A est une stratégie probabiliste ssi il existe une stratégie *déterministe* τ sur $\mathbf{B} \Rightarrow A$ telle que $\sigma = \mathsf{coin} ; \tau$.

4. Pour tout A on note $!_A : A \Rightarrow \mathbf{1}$ l'unique stratégie (vide) vers l'arène terminale et $\mathsf{coin}_A = \langle !_A ; \mathsf{coin}, \mathsf{Id}_A \rangle : A \Rightarrow \mathbf{B} \times A$.

Montrer par un raisonnement *purement catégorique* (sous la seule hypothèse que $\times$ est un produit cartésien) que l'ensemble des flèches qui s'écrivent $\mathsf{coin}_A ; \tau$ pour un certain τ déterministe est une catégorie.

5. Conclure.

3 Monades

Une monade (T, μ, η) sur une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en un foncteur $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et deux tranformations naturelles $\mu : T \circ T \longrightarrow T$, $\eta : Id \longrightarrow T$, c'est-à-dire deux familles $(\mu_A : TTA \longrightarrow TA)_{A \in \mathcal{C}}$ et $(\eta_A : A \longrightarrow TA)_{A \in \mathcal{C}}$ naturelles en A. Le triplet (T, μ, η) vérifie les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd} T \circ T \circ T \arrow[r, "\mu \circ T"] \arrow[d, "T \circ \mu"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\ T \circ T \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} Id \circ T \arrow[r, "\eta \circ T"] \arrow[dr, equal] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] & T \circ Id \arrow[l, "T \circ \eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & T & \end{tikzcd} \tag{2}$$

1. Exprimer diagrammatiquement le fait que les familles $(\mu_A : TTA \longrightarrow TA)_{A \in \mathcal{C}}$ et $(\eta_A : A \longrightarrow TA)_{A \in \mathcal{C}}$ sont naturelles en A.

2. On peut traduire le diagramme (2) par l'existence, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "\eta_{TA}"] \arrow[dr, equal] & TTA \arrow[d, "\mu_A"] & TA \arrow[l, "T\eta_A"'] \arrow[dl, equal] \\ & TA & \end{tikzcd}$$

Exprimer le diagramme commutatif correspondant à l'objet A, pour le diagramme (1).

3. Si (T, μ, η) est une monade sur une catégorie $\mathcal{C}$, on appelle *catégorie de Kleisli*, notation $\mathbf{K_T}(\mathcal{C})$, la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$, dont les morphismes $A \longrightarrow B$ sont les morphismes $A \longrightarrow TB$ dans $\mathcal{C}$.

3.a) Définir la composition dans la catégorie de Kleisli $\mathbf{K_T}(\mathcal{C})$, et montrer que cette composition est associative.

3.b) Définir les morphismes identités dans la catégorie de Kleisli $\mathbf{K_T}(\mathcal{C})$, et montrer que ces morphismes identités sont neutres à gauche et à droite pour la composition.

4 Suspension

Une arène HO (négative) est un triplet $(M_A, \vdash_A, \lambda_A)$ où

— M_A est un ensemble de *coups*,

— λ_A est une fonction $M_A \longrightarrow \{+, -\}$ de polarité,

— $\vdash_A$ est une relation binaire de *justification* définissant une forêt alternée sur les coups, telle que toutes les racines sont négatives.

Une *partie* est une suite pointée alternée justifiée. Une partie est *filaire* si elle ne contient qu'un seul coup initial (=coup racine dans l'arène).

Une *stratégie filaire* de A est un ensemble σ de parties filaires de A, tel que:

— toutes les parties de σ sont de *longueur paire*

— σ est *clos par préfixe pair:*

$$\forall s \cdot a \cdot b, \qquad\qquad s \cdot a \cdot b \in \sigma \;\Rightarrow\; s \in \sigma$$

— σ est *déterministe:*

$$\forall s \cdot a \cdot b, \forall s \cdot a \cdot c, \qquad\qquad s \cdot a \cdot b \in \sigma \text{ et } s \cdot a \cdot c \in \sigma \;\Rightarrow\; b = c$$

On note $\mathcal{G}$ la catégorie des arènes HO et stratégies filaires.

1. Soit une arène A. On écrit $T(A)$ l'arène (négative) obtenue par “double suspension”, c'est-à-dire en rajoutant un coup $*_P$ puis un coup $*_O$ sous les racines de la forêt A. Montrer que l'opération définit un foncteur

$$T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

2. Un morphisme $A \longrightarrow B$ de la catégorie $\mathcal{G}$ est dit *transverse* lorsque, pour tout coup initial b de B, il existe un coup initial a de A, tel que $b \cdot a \in \sigma$. Montrer que les stratégies transverses de $\mathcal{G}$ forment une sous-catégorie $\mathcal{N}$.

3. Montrer que le foncteur $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ est en fait un foncteur de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{N}$.

4. Rappel: Le foncteur d'oubli U de $\mathcal{N}$ vers $\mathcal{G}$ transforme une flèche de $\mathcal{N}$ en elle-même, mais vue dans $\mathcal{G}$. Montrer que le foncteur $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{N}$ est adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{G}$. Autrement dit, qu'il existe une famille $(\phi_{(A,B)})$ de bijections

$$\frac{TA \xrightarrow{\mathcal{N}} B}{A \xrightarrow{\mathcal{G}} UB} \tag{3}$$

naturelle en A et B.

5. En déduire informellement, en utilisant un résultat du cours, que $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une monade dans $\mathcal{G}$, et décrire les transformations naturelles $\mu : T \circ T \longrightarrow T$ et $\eta : Id \longrightarrow T$ associée.

6. Expliquer pourquoi la catégorie de Kleisli sur T est presque, mais pas tout à fait, la catégorie des arènes et stratégies non-filaires.

7.a) Montrer que les suites d'entiers s'interprètent naturellement comme des stratégies filaires dans $T\mathbf{N}$.

7.b) Décrire les stratégies rigides (dont les questions pointent au-delà de la dernière réponse visible d'O) sur $T\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N}$.