Master Parisien de Recherche en Informatique

Modèles des langages de programmation

Travaux Dirigés n°5

Paul-André Melliès

`<mellies@pps.jussieu.fr>`

Nous avons vu en cours comment voir un graphe comme un *foncteur* F partant de la catégorie

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, bend right, "s"'] \arrow[d, bend left, "t"] \\ 0 \end{tikzcd}$$

dans la catégorie $\underline{\text{Ens}}$ des ensembles et des fonctions ; et un morphisme de graphe comme une *transformation naturelle* entre deux tels foncteurs F et G. Dans cet exercice, nous nous intéressons à la notion de *graphe réflexif* défini par:

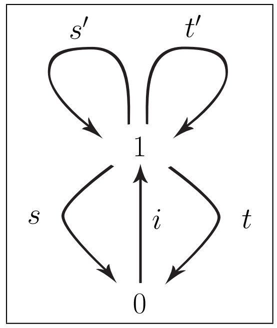
- un ensemble de sommets X_0 et un ensemble d'arêtes X_1,
- pour toute arête $e \in X_1$, un sommet source $x = \partial_0(e)$ et un sommet arrivée $y = \partial_1(e)$, ce qu'on note comme d'habitude

$$e \quad : \quad x \quad \rightarrow \quad y,$$

- pour tout sommet $x \in X_0$, une arête "identité" distinguée

$$\iota(x) \quad : \quad x \quad \rightarrow \quad x.$$

Pour cela, nous introduisons la catégorie suivante $\mathbb{G}$ formée de deux objets 0 et 1 distincts, et de cinq morphismes s, t, i, s', t' distincts, au côté des morphismes identités id_0 et id_1. Ces morphismes sont organisés selon le diagramme suivant:



et vérifient les égalités:

- $s \circ i = id_0 = t \circ i$,
- $s' = i \circ s$ et $t' = i \circ t$.

L'exercice a pour objectif de montrer que la catégorie $\mathbb{G}$ est plus simple qu'elle n'en a l'air... et qu'elle capture exactement la notion de graphe réflexif.

(1.) Montrer que les égalités suivantes sont satisfaites dans la catégorie $\mathbb{G}$:

1. $s' \circ s' = s'$,
2. $t' \circ s' = s'$,
3. $s \circ s' = s$,
4. $t \circ s' = s$,
5. $s' \circ i = i$.

En déduire que la catégorie $\mathbb{G}$ est entièrement décrite par sa définition. [Note: on pourra utiliser une symétrie entre s, s' et t, t' pour déduire les cinq égalités manquantes.]

(2.) Tout morphisme de la catégorie $\mathbb{G}$ est un morphisme identité, ou la composée de morphismes s, t et i. En déduire (brièvement) que tout foncteur

$$F \quad : \quad \mathbb{G} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}$$

dans une catégorie $\mathbb{C}$ est caractérisé par les données suivantes:

- la paire d'objets $X_0 = F(0)$ et $X_1 = F(1)$,

- le triplet de morphismes

$$\partial_0 = F(s) : X_1 \to X_0 \qquad \partial_1 = F(t) : X_1 \to X_0$$
$$\iota = F(i) : X_0 \to X_1$$

Montrer, de plus, que les trois morphismes $\partial_0, \partial_1, \iota$ satisfont les équations:

$$\partial_0 \circ \iota \quad = \quad id_{X_0} \quad = \quad \partial_1 \circ \iota. \tag{1}$$

(3.) Réciproquement, montrer que toute paire d'objets X_0 et X_1 et triplet de morphismes $\partial_0, \partial_1, \iota$ dans une catégorie $\mathbb{C}$, organisés selon le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, bend right=60, "\partial_0"'] \arrow[d, bend left=60, "\partial_1"] \\ X_0 \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

et vérifiant les équations (1) définit un tel foncteur $F : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{C}$.

(4.) Nous avons signalé en question (2.) que tout morphisme de la catégorie $\mathbb{G}$ est un morphisme identité, ou la composée de morphismes s, t et i. En déduire (brièvement) qu'une transformation naturelle

$$\theta \quad : \quad F \quad \Rightarrow \quad G \quad : \quad \mathbb{G} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}$$

entre deux tels foncteurs

$$F = (X_1, X_0, \partial_0, \partial_1, \iota) \qquad \text{et} \qquad G = (Y_1, Y_0, \partial_0, \partial_1, \iota)$$

correspond à une paire de morphismes

$$\theta_0 \quad : \quad X_0 \quad \to \quad Y_0$$
$$\theta_1 \quad : \quad X_1 \quad \to \quad Y_1$$

faisant commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\partial_0"'] & Y_1 \arrow[d, "\partial_0"] \\ X_0 \arrow[r, "\theta_0"] & Y_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] & Y_1 \arrow[d, "\partial_1"] \\ X_0 \arrow[r, "\theta_0"] & Y_0 \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\theta_1"] & Y_1 \\
X_0 \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\theta_0"] & Y_0 \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}
$$

(5.) Conclure dans le cas où la catégorie $\mathbb{C}$ d'arrivée est la catégorie <u>Ens</u>.

Problème. Nous avons vu en cours la construction exponentielle, qui à tout espace de cohérence $A = (|A|, \overset{\frown}{\smile}_A)$ associe l'espace de cohérence $!A$,

- dont les éléments de la trame $|!A|$ sont les cliques finies de A,
- où deux éléments $u, v \in |!A|$ de la trame sont cohérents lorsque leur union (en tant que cliques) est une clique de A.

Ici, on s'intéresse à une décomposition de cette modalité exponentielle, au moyen de la modalité de suspension S qui à tout espace de cohérence A associe l'espace de cohérence SA dont les éléments de la trame $|SA|$ sont

- les cliques singleton $[a]$ contenant exactement un élément a de la trame $|A|$,
- la clique vide de A, le plus souvent notée $*_A$ dans ce cadre.

La relation de cohérence de SA est définie comme la relation de cohérence de A sur les cliques singleton:

$$\forall a_1, a_2 \in |A|, \qquad [a_1] \overset{\frown}{\smile}_{SA} [a_2] \iff a_1 \overset{\frown}{\smile}_A a_2$$

avec l'élément $*_A$ cohérent avec tous les autres éléments de la trame:

$$\forall a \in |A|, \qquad *_A \overset{\frown}{\smile}_{SA} [a].$$

Du point de vue logique, la modalité de suspension permet d'appliquer la règle d'affaiblissement à une formule modalisée – mais pas la règle de contraction.