Master Parisien de Recherche en Informatique

Modèle des langages de programmation

Domaines, Catégories, Jeux

(Cours 2.2)

Paul-André Melliès

www.pps.jussieu.fr/∼mellies/master.html

Modèles des langages de programmation

Domaines, catégories, jeux

Introduction au cours

La sémantique dénotationnelle (1)

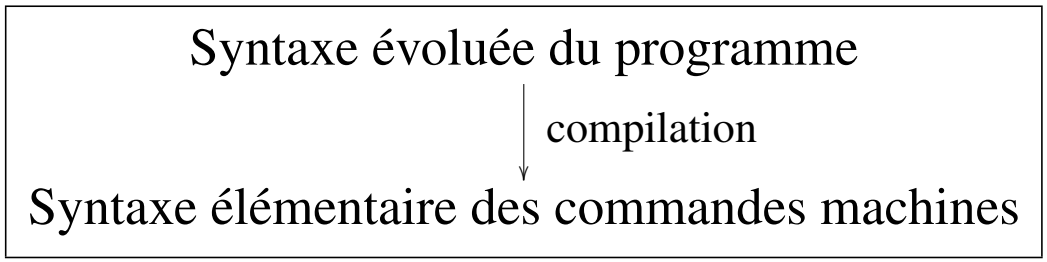
Etude mathématique des langages de programmation et de leur schéma de compilation.

Des langages fonctionnels ou impératifs, fondés sur un noyau de λ-calcul:

PCF	Algol	ML	OCAML	JAVA
λ-calcul	états	exceptions	modules	concurrence
ordre supérieur		références	objets	synchronisation
typage				threads
récursion				

La sémantique dénotationnelle (2)

Son objectif: une mathématique qui décrive un langage de programmation depuis sa conception jusqu'à sa compilation.



Préalable indispensable à la vérification complète d'une implémentation.

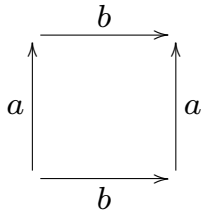
Syntaxe ou sémantique?

Tenir les langages de programmation par les deux bouts:

— les manipulations syntaxiques,

— la signification qu'on prête à ces manipulations.

Ainsi qu'en topologie algébrique, on construit des ensembles simpliciaux (syntaxe) dont on établit le genre (sémantique)...



$\Longrightarrow$ un tore

... mais cette fois sur le langage et sur le raisonnement !

Syntaxe

Church 1935: invention syntaxique du λ-calcul

Le λ-calcul est le calcul syntaxique ou formel des fonctions.

Les expressions du λ-calcul sont appelés des λ-termes.

Le λ-calcul est un calcul plutôt bizarre où tout λ-terme P est à la fois:

* une fonction qui s'applique à tous les λ-termes, y compris lui-même,
* un argument de n'importe quel λ-terme, y compris lui-même.

On a longtemps cru que le λ-calcul n'était qu'un jeu d'écriture, auquel on ne saurait pas donner de sens mathématique — jusqu'au modèle dénotationnel de Dana Scott (1976).

Sémantique

La sémantique des domaines

L'idée clef: La sémantique d'un programme :

$$P : A \longrightarrow B$$

est une fonction :

$$[P] : [A] \longrightarrow [B]$$

du domaine des entrées A vers le domaine des sorties B.

Définition: un domaine est un ensemble ordonné avec limites filtrantes.

On obtient des catégories cartésiennes fermées dans lesquelles l'interprétation des programmes est compositionnelle:

$$[A] \xrightarrow{[P]} [B] \xrightarrow{[Q]} [C] \quad = \quad [A] \xrightarrow{[P;Q]} [C]$$

La sémantique des jeux

Sémantique des jeux = Sémantique des Domaines + Temporalité

L'idée clef: La sémantique d'un programme :

$$P : A \longrightarrow B$$

est une stratégie interactive :

$$[P] : [A] \multimap [B]$$

qui joue à la fois sur le jeu des entrées A et le jeu des sorties B.

Fait nouveau: La sémantique devient un algorithme!

Sémantique = compilation idéalisée et compositionnelle

La sémantique des jeux

On veut évaluer un programme P en face d'un environnement E:

Programme $\longleftrightarrow$ Environnement

Point troublant: Cette évaluation se ramène à l'exploration réciproque et interactive de P par E, et de E par P.

L'évaluation est une forme interactive de parsing.

Catégories

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'une classe d'objets,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A, B)$ de morphismes pour tout couple d'objets (A, B),

— d'une loi de composition $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme identité $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$ pour tout objet A,

1— tel que $\circ$ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D), \qquad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de $\circ$

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B), \qquad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$.

Examples

1. La catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles et fonctions.

2. Tout ensemble ordonné $(X, \leq)$ définit une catégorie par:

$$x \longrightarrow y \text{ ssi } x \leq y.$$

3. Un grand nombre d'exemple en sémantique.

Logique linéaire

La logique intuitionniste en 1985

Une constellation de points de vue:

Catégories
cartésiennes closes
(algèbre)

λ-calcul et
déduction naturelle
(géométrie)

Modèles
de Scott
(statique)

Elimination des coupures

Calcul
des séquents
(syntaxe)

Concrete
data structures
(dynamique)

Machine de Krivine
et CAM
(compilation)

La secrète noirceur du lait: décomposition linéaire du λ-calcul (1)

Nombres de Church

$$0 = (\lambda f.\lambda x.x) \qquad 1 = (\lambda f.\lambda x.fx) \qquad 2 = (\lambda f.\lambda x.f(f(x)))$$

Là, un série de calculs “atomiques” $\longrightarrow$ qui ne font que déplacer et réorganiser les termes

$$1PQ \longrightarrow (\lambda x.Px)Q \longrightarrow PQ$$

Ici, une série de calculs où chaque étape $\stackrel{*}{\longrightarrow}$ est en fait une “molécule” de manipulations atomiques

$$0PQ \stackrel{*}{\longrightarrow} (\lambda x.x)Q \longrightarrow Q \qquad 2PQ \stackrel{*}{\longrightarrow} (\lambda x.P(Px))Q \longrightarrow P(PQ)$$

— Dans le premier cas, $\stackrel{*}{\longrightarrow}$ efface le λ-terme P.

— Dans le deuxième cas, $\stackrel{*}{\longrightarrow}$ duplique le λ-terme P.

Pourtant, dans les deux cas, $\stackrel{*}{\longrightarrow}$ ne représente qu’une étape de β-reduction.

Décomposition linéaire du λ-calcul (2)

Objectif: Décomposer les mécanismes de duplication et d'effacement du λ-calcul.

Pour quoi faire?

> Extraire les atomes syntaxiques des molécules existantes, et en dresser un tableau de Mendeleiev.

Ambitieux, mais jusqu'ici, ça marche!

La décomposition de LJ et LK en LL:

$$A \Rightarrow B \;=\; !A \multimap B$$

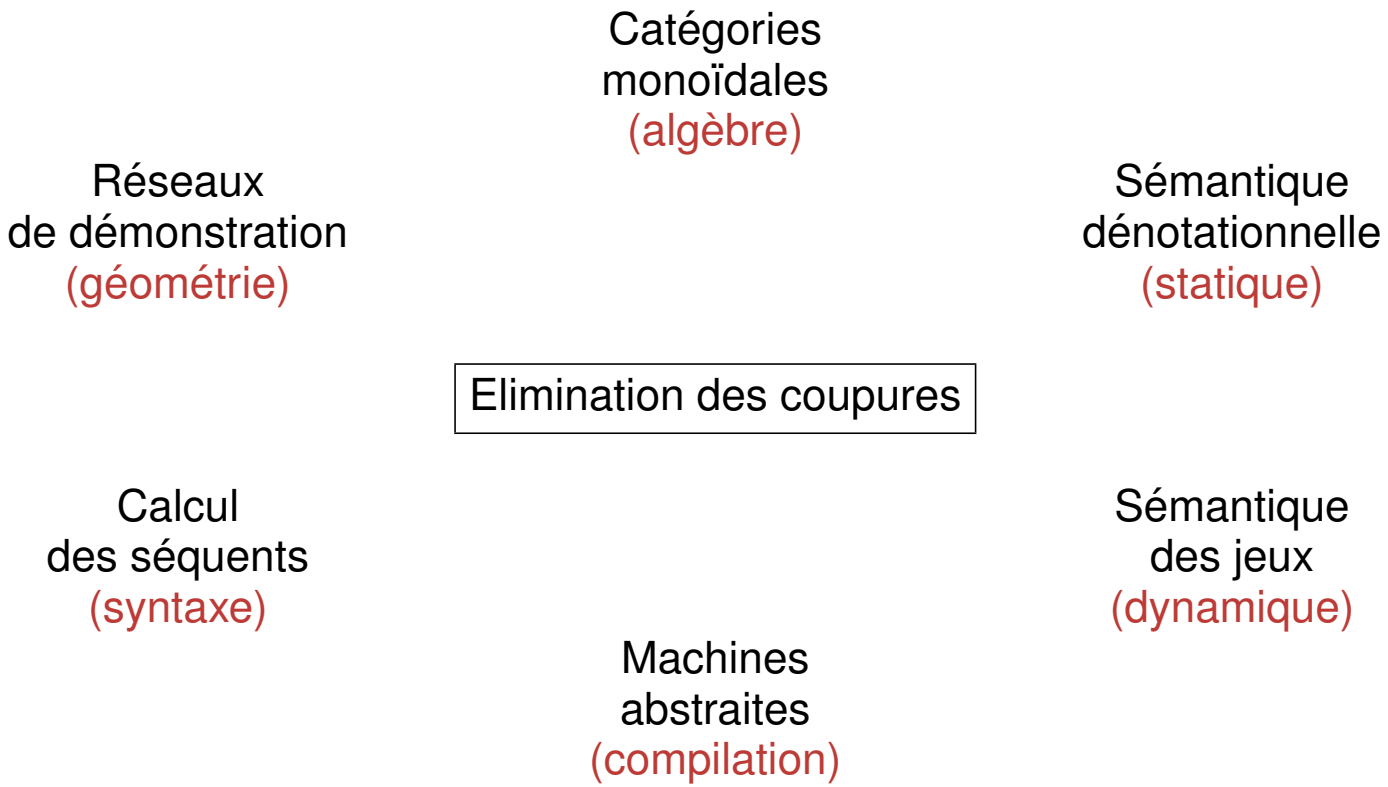
1. réévalue et simplifie les modèles dénotationnels du λ-calcul, à la fois statiques (e.g. domaines vus comme espaces de cohérence) et dynamiques (e.g. CDSs vu comme sémantique des jeux),

2. explique certains mécanismes d'optimalité (Lévy) en λ-calcul, de partage de ressource, ouvre la voie à des typages de complexité polynomiale, ...

3. surtout, en ce qui nous concerne, la décomposition dévoile une symétrie brisée en LJ et LK, en faisant apparaitre la dualité fondamentale, et cachée jusque là, entre Joueur (P) et Opposant (O).

Logique linéaire

La logique linéaire offre une relecture globale de LJ et de LK.



Depuis 15 ans, des résultats étonnants sur chacun des pôles, et aux interfaces.