Master Parisien de Recherche en Informatique
Cours 2.2

Modèle des langages de programmation
Domaines, Catégories, Jeux

Dernière séance

Exponentielle;

Construction de Kleisli

Séance précédente: la catégorie Ens comme ccc

— Une catégorie cartésienne est une catégorie $\mathcal{C}$ où sont spécifiés:

- pour chaque couple d'objets A, B, un produit cartésien $A \times B$ et ses projections $A \times B \longrightarrow A$ et $A \times B \longrightarrow B$,

- un objet terminal $\mathbf{1}$.

— Une catégorie cartésienne close est une catégorie cartésienne où sont spécifiés, pour chaque objet B,

- un foncteur

$$(- \Rightarrow -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},$$

- une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,C}$ indexée par des objets A, B, C:

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \Rightarrow C)$$

  naturelle en A, B et C.

I. Espaces de cohérence.

Espace de cohérence

Ce modèle est à l'origine de la logique linéaire (1986).

Décomposition linéaire du modèle des dI-domaines et fonctions stables.

Depuis, d'autres telles linéarisations ont été opérée:

Structures de données concrètes Berry-Curien 1985	$\Rightarrow$	Jeux Lamarche 1992
dI-domaines avec cohérence et fonctions fortement stables Bucciarelli-Ehrhard 1991	$\Rightarrow$	Espace d'hypercohérence Ehrhard 1993
Bidomaines Berry 1979	$\Rightarrow$	Bistructures Curien-Plotkin-Winskel 1996

Espace de cohérence

On appelle espace de cohérence un couple $A = (|A|, \frown\!\!\!\!\smile_A)$ formé

— d'un ensemble $|A|$ appelé la trame de A

— d'une relation reflexive symétrique $\frown\!\!\!\!\smile_A \subset |A| \times |A|$ appelée cohérence.

Espace de cohérence est une manière pédante de dire graphe.

Notation: on écrit

— $a \frown_A a'$ si $a \frown\!\!\!\!\smile_A a'$ et $a \neq a'$.

— $a \asymp_A a'$ si $\neg(a \frown\!\!\!\!\smile_A a')$ ou $a = a'$.

Exemple 1. les espaces de cohérence $0 = \top$ de trame vide et $1 = \bot$ de trame singleton.

Exemple 2. pour tout ensemble X, l'espace de cohérence “discret” $(X, =)$. En particulier, $B = (\{V, F\}, =)$ et $N = (\mathbb{N}, =)$.

Interaction

Une clique u dans un graphe A est un sous-ensemble de $|A|$ tel que

$$\forall (a, a') \in u, \qquad a \frown_A a'$$

Une anticlique v dans un graphe A est un sous-ensemble de $|A|$ tel que

$$\forall (a, a') \in v, \qquad a \asymp_A a'$$

Nous allons interpréter

— les types simples du λ-calcul comme des graphes,

— les programmes u de type A comme des cliques de A,

— les contre-programmes v de type A comme des anti-cliques de A,

— l'interaction entre u et v comme l'intersection $u \cap v$.

Remarque: $u \cap v$ contient au plus un élément (=le résultat!).

La négation

Soit A un espace de cohérence. On définit sa négation $A^\perp$ comme le graphe dual de A:

— $|A^\perp| = |A|$

— $a \mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_{A^\perp} a'$ ssi $a \mathrel{\overset{\smile}{\frown}}_A a'$.

Remarque: une anti-clique de A est une clique de $A^\perp$. On fait donc interagir une clique de A contre une clique de $A^\perp$. Dualité Joueur vs. Opposant.

Propriété fondamentale:

$$A \;=\; (A^\perp)^\perp$$

La somme (plus)

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit la somme $A \oplus B$ comme la somme des graphes A et B

— $|A \oplus B| = |A| + |B|$

— $a \frown_{A \oplus B} a'$ ssi $a \frown_A a'$,

— $b \frown_{A \oplus B} b'$ ssi $b \frown_B b'$,

— $a \frown_{A \oplus B} b$ jamais.

exo. montrer que les graphes $A \oplus 0$ et A sont isomorphes.

Le produit (avec)

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le produit $A \& B$ comme une somme "alternative" des graphes A et B.

— $|A \& B| = |A| + |B|$

— $a \frown_{A \& B} a'$ ssi $a \frown_A a'$,

— $b \frown_{A \& B} b'$ ssi $b \frown_B b'$,

— $a \frown_{A \& B} b$ toujours.

exo. montrer que

$$A \& B \;=\; (A^{\perp} \oplus B^{\perp})^{\perp}$$

Tenseur

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le tenseur $A \otimes B$ comme le produit des deux graphes A et B:

— $|A \otimes B| = |A| \times |B|$

— $(a, b) \overset{\frown}{\smile}_{A \otimes B} (a', b')$ ssi $a \overset{\frown}{\smile}_A a'$ et $b \overset{\frown}{\smile}_B b'$.

exo. montrer que les graphes $A \otimes 1$ et A sont isomorphes.

Par

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit le par-produit $A \parr B$ comme un produit “alternatif” des deux graphes A et B:

— $|A \parr B| = |A| \times |B|$

— $(a,b) \frown_{A \parr B} (a',b')$ ssi $a \frown_A a'$ ou $b \frown_B b'$.

exo. montrer que

$$A \parr B \;=\; (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$$

Distributivité

$$A \otimes (B \oplus C) \;\cong\; (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$
$$A \parr (B \& C) \;\cong\; (A \parr B) \& (A \parr C)$$

Réminiscent de $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$ dans $\mathbf{Ens}$. Dès lors, on appellera

— additifs les connecteurs $\oplus$ et $\&$, et unités 0 et $\top$,

— multiplicatifs les connecteurs $\otimes$ et $\parr$, et unités 1 et $\perp$.

Remarque: $\cong$ signifie ici isomorphes en tant que graphes, ou bien isomorphes dans la catégorie $\mathbf{Coh}$ construite ci-après.

Flèche linéaire

Soient A et B deux espaces de cohérence. On définit la flèche linéaire $A \multimap B$ de A et B comme

— $|A \multimap B| = |A| \times |B|$

— $(a, b) \frown_{A \multimap B} (a', b')$ ssi $\begin{cases} a \frown_A a' \text{ implique } b \frown_B b' \\ \text{et} \\ b \frown_{B^\perp} b' \text{ implique } a \frown_{A^\perp} a' \end{cases}$

exo. Montrer que

$$A \multimap B = A^\perp \parr B = (A \otimes B^\perp)^\perp$$

La catégorie $\mathbf{Coh}$

La catégorie $\mathbf{Coh}$ est définie comme la catégorie

— dont les objets sont les espaces de cohérence,

— dont les morphismes $f : A \longrightarrow B$ sont les cliques de $A \multimap B$.

L'identité

$$id_A = \{(a, a) \in |A \multimap A|\}$$

La composition de $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$.

$$g \circ f = \{(a, c) \in |A \multimap C| \mid \exists b \in |B| \quad (a, b) \in f \text{ et } (b, c) \in g\}$$

exo. Vérifier que les définitions d'identité et de composition définissent une catégorie.

Exercice

exo. Montrer que la catégorie $\mathbf{Coh}$ contient la catégorie des ensembles et fonctions partielles comme sous-catégorie pleine (voir [MacLane] pour une définition de full sub-category). Pour cela, considérer l'espace de cohérence "discret" $(X, =)$ associé à un ensemble X.

Montrer que la sous-catégorie est close par $\oplus$ et $\otimes$, mais pas close par $\multimap$. Montrer que toutes les anticliques de $(X, =) \multimap (Y, =)$ sont sous-ensemble d'une ligne d'abscisse.

Damnation: Coh n'est pas cartésienne fermée!

exo. Montrer que

— $A\&B$ est produit cartésien de A et B dans la catégorie $\mathbf{Coh}$.

— que l'objet $\top$ est terminal dans $\mathcal{C}$.

En déduire que $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ définit une catégorie cartésienne.

exo. Montrer que seul l'objet $0 = \top$ admet une exponentiation cartésienne dans la catégorie cartésienne $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$. [Utiliser (1) l'égalité $0 = \top$, (2) que $\mathbf{Hom}(0, A)$ est singleton pour tout objet A, (3) que tout objet A exponentiable définit une bijection

$$\frac{A\&\top \longrightarrow B}{\top \longrightarrow A \Rightarrow B} \quad \phi_{\top,A,B}$$

pour démontrer que $\mathbf{Hom}(A, B)$ est singleton, pour tout objet B.] En déduire que la catégorie $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$ n'est pas cartésienne fermée.

Mais presque...

exo. Utiliser l'associativité et la définition de $\invamp$ pour montrer que

$$(A \otimes B) \multimap C = B \multimap (A \multimap C)$$

En déduire qu'il existe pour tout espace de cohérence A une famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ dans $\mathbf{Coh}$:

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C} \quad \phi_{A,B,C}$$

dont il s'agira de montrer la naturalité en B et C.

Verdict:

— la structure cartésienne est donnée par les additifs $\&$ et $\top$,

— la structure fermée est donnée par les multiplicatifs $\otimes$ et $\mathbf{1}$.

Prescription:

— il faut une exponentielle pour relier les mondes additifs et multiplicatifs.

II. La structure de $\mathbf{Coh}$

Catégories symétriques monoïdales fermées.

Intuition

Tout refaire comme dans les catégories cartésiennes fermées mais en remplaçant le produit cartésien $\times$ par un bifoncteur $\otimes$ arbitraire.

Remplacer la propriétés universelle de $\times$ par une série de diagrammes de cohérence sur $\otimes$.

On obtient une catégorie symétrique monoïdale.

Puis remplacer l'adjonction $\dfrac{A \times B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \Rightarrow C}$ par une adjonction $\dfrac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C}$.

On obtient ainsi une catégorie symétrique monoïdale fermée (smcc) où on interpréte la logique linéaire multiplicative intuitionniste (=λ-calcul linéaire.)

Catégorie monoïdale

Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

associatif "modulo" un isomorphisme naturel

$$\alpha : A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

munie d'un objet 1, unité de $\otimes$ "modulo" un isomorphisme naturel

$$\lambda : 1 \otimes A \longrightarrow A \qquad\qquad \rho : A \otimes 1 \longrightarrow A$$

Ces morphismes doivent faire commuter le "pentagone de MacLane"

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\alpha"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha\otimes D"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D
\end{tikzcd}$$

ainsi que le triangle:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (1 \otimes B) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\lambda"'] & (A \otimes 1) \otimes B \arrow[d, "\rho\otimes B"] \\
A \otimes B \arrow[r, equal] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

Symétrie

Une symétrie dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ consiste en une famille d'isomorphismes

$$\gamma_{A,B} \quad : \quad A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

naturelle en A et B, qui vérifie l'égalité:

$$A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A \xrightarrow{\gamma_{B,A}} A \otimes B \quad = \quad A \otimes B \xrightarrow{id_{A \otimes B}} A \otimes B$$

et fait commuter les diagrammes:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes 1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\rho"'] & 1 \otimes A \arrow[d, "\lambda"] \\
A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A \otimes \gamma"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\gamma"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "\gamma \otimes B"] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

Exemples de catégories monoidales

Sans symétrie:

— La catégorie des tresses,

Avec symétrie:

— La catégorie des permutations,

— Toute catégorie cartésienne, avec le produit cartésien pour tenseur, et l'objet terminal pour unité,

— La catégorie duale d'une catégorie monoïdale symétrique,

— La catégorie $\mathbf{Coh}$ avec tenseur $\otimes$ et unité 1.

exo. Démontrer que les exemples forment bien des catégorie monoïdales, avec symétrie dans les trois derniers cas.

Le pourquoi des diagrammes de cohérence

“Every diagram commutes”

Effet Canada Dry: Retrouver une conséquence de la propriété universelle... sans la propriété universelle.

Intuitivement: soit $A_1, ..., A_p$ une liste de p objets dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$. Un mot w sur $(A_1, ..., A_p)$ est un objet de la forme:

— 1 lorsque $p = 0$,

— $u \otimes v$ où u est un mot sur $(A_1, ..., A_m)$, et v est un mot sur $(A_{m+1}, ..., A_p)$, pour un certain $1 \leq m \leq p$.

Parmi les mots sur $(A_1, ..., A_p)$, le mot canonique $(\cdots(A_1 \otimes A_2) \otimes \cdots A_p)$.

Théorème de cohérence: il n’existe qu’un seul morphisme structural “α, λ, ρ” d’un mot sur $(A_1, ..., A_p)$ au mot canonique sur $(A_1, ..., A_p)$.

En fait: –1– un seul isomorphisme naturel canonique entre des foncteurs mots $\mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}$. –2– Ou bien: toute catégorie monoïdale symétrique est équivalente à une catégorie monoïdale symétrique stricte. –3– Ou bien, la catégorie monoïdale symétrique est la catégorie des permutations. Voir chapitres VII.2 et IX dans MacLane.

Exponentiation monoïdale

Soit A un objet dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$.

On appelle exponentiation monoïdale de A le couple formé par un foncteur

$$(A \multimap -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et une famille $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ de bijections indexée par des objets B, C de $\mathcal{C}$:

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \otimes B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \multimap C)$$

naturelle en B et C.

Catégorie symétrique monoïdale fermée

Une catégorie symétrique monoïdale fermée (smcc) est une catégorie symétrique monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ munie d'une exponentiation monoïdale

$$\frac{A \otimes B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \multimap C} \quad \phi_{A,B,C} \tag{1}$$

pour tout objet A.

Par le théorème du paramètre, $\multimap$ définit un bifoncteur $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ soit naturelle en A, B, et C.

On définit le morphisme $eval_{A,B} : A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B$ de la manière suivante:

$$\frac{A \multimap B \xrightarrow{id} A \multimap B}{A \otimes (A \multimap B) \longrightarrow B} \quad \phi^{-1}_{A \multimap B, A, B}$$

exo. Montrer que toute catégorie cartésienne fermée est une catégorie symétrique monoïdale fermée.

Logique linéaire multiplicative intuitionniste

$$A, B ::= \mathbf{1} \mid A \otimes B \mid A \multimap B \mid \alpha$$

Axiome $\dfrac{}{A \vdash A}$

$\multimap$ gauche $\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}$ $\multimap$ droit $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}$

$\otimes$ gauche $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}$ $\otimes$ droit $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$

1 gauche $\dfrac{\Gamma, 1 \vdash A}{\Gamma \vdash A}$ 1 droit $\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}$

Coupure $\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$

Permutation $\dfrac{\Gamma, A_1, A_2, \Delta \vdash B}{\Gamma, A_2, A_1, \Delta \vdash B}$

Interprétation de la logique

Axiome: $A \xrightarrow{id_A} A$

$\multimap$ gauche: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes f \otimes A \multimap B} \Gamma \otimes A \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{\Gamma \otimes eval_{A,B}} \Gamma \otimes B \xrightarrow{g} C$$

$\multimap$ droit: $\Gamma \otimes A \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{\Gamma,A,B}(f)} A \multimap B$.

$\otimes$ gauche: $\Gamma \otimes A \otimes B \xrightarrow{f} C$ reste tel qu'en lui-même.

$\otimes$ droit: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} B$ deviennent $\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes B$

Interprétation de la logique (suite)

Coupure: $\Delta \xrightarrow{f} A$ et $\Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$ deviennent

$$\Gamma \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes f} \Gamma \otimes A \xrightarrow{g} B$$

Permutation: $\Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes \Delta \xrightarrow{\Gamma \otimes \gamma_{A_2,A_1} \otimes \Delta} \Gamma \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes \Delta \xrightarrow{f} B$$

Remarque: pour simplifier, la catégorie est supposée stricte. c'est-à-dire que α, λ et ρ sont toutes des identités.

III. La structure catégorique de $\mathbf{Coh}$ (suite)

Dualité et catégories $*$-autonomes.

Catégorie $*$-autonome

Tout couple d'objets $A, \perp$ dans une catégorie symétrique monoïdale fermée $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, définit un morphisme identité

$$id_{A \multimap \perp} : A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp$$

que la bijection $\phi^{-1}_{A \multimap \perp, A, \perp}$ transporte en le morphisme

$$eval_{A,\perp} : A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp$$

qui devient en précomposant avec la symétrie:

$$(A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp$$

que la bijection $\phi_{A \multimap \perp, A, \perp}$ transporte en un morphisme:

$$A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$$

Un objet $\perp$ est dualisant lorsque le morphisme canonique $A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ est un isomorphisme, pour tout objet A.

Une catégorie symétrique monoïdale fermée avec un objet dualisant est appelé catégorie $*$-autonome.

La catégorie Coh est $*$-autonome

$\perp = 1^\perp$ est l'espace de cohérence avec la trame singleton $|\perp| = \{*\}$.

$$\begin{array}{lll}
e = id_{A \multimap \perp} & A \multimap \perp \longrightarrow A \multimap \perp & \{((a,*),(a,*)) \mid a \in |A|\} \\
f = \phi^{-1}_{A \multimap \perp, A, \perp}(e) & A \otimes (A \multimap \perp) \longrightarrow \perp & \{((a,(a,*)),*) \mid a \in |A|\} \\
g = f \circ \gamma_{A, A \multimap \perp} & (A \multimap \perp) \otimes A \longrightarrow \perp & \{(((a,*),a),*) \mid a \in |A|\} \\
h = \phi_{A \multimap \perp, A, \perp}(g) & A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp & \{(a,((a,*),*)) \mid a \in |A|\}
\end{array}$$

Le morphisme h est un isomorphisme, d'inverse la clique

$$h^{-1} = \{(((a,*),*),a) \mid a \in |A|\}$$

Logique linéaire multiplicative (MLL)

$$A, B ::= A \otimes B \mid \mathbf{1} \mid A \parr B \mid \bot \mid \alpha$$

Axiome	$\dfrac{}{A \vdash A}$
$\otimes$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}$
$\parr$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}$
1	$\dfrac{}{\vdash 1}$
$\bot$	$\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}$

La logique MLL s'interprète dans toute catégorie $*$-autonome.

Logique linéaire multiplicative additive (MALL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid 0 \mid \mathbf{1} \mid A \& B \mid A \parr B \mid \top \mid \bot \mid \alpha$$

MLL+

$\oplus$ gauche	$\dfrac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\oplus$ droit	$\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$
$\&$	$\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}$
0	pas de règle
$\top$	$\dfrac{}{\vdash \Gamma, \top}$

La logique MALL s'interprète dans toute catégorie à la fois cartésienne et $*$-autonome.

IV. La structure de $\mathbf{Coh}$ (fin)

Exponentielles.

Le nouvel ingrédient: l'exponentielle

On définit l'exponentielle $!A$ d'un espace de cohérence A comme le graphe

— dont la trame $|!A|$ est l'ensemble des cliques finies de A,

— $u \frown_{!A} v$ ssi l'union $u \cup v$ est une clique finie de A.

exo. Montrer que $!A$ définit un dI-domaine dont $|!A|$ est l'ensemble des éléments compacts, ordonnés par inclusion entre cliques finies.

L'espace de cohérence $?A$ est défini par:

$$?A = (!A^{\perp})^{\perp}$$

L'alchimie exponentielle

Le rôle de l'exponentielle est de transmuter les additifs en multiplicatifs!

Le nom "exponentielle" est justifié par les isomorphismes suivants:

$$!(A\&B) \cong !A \otimes !B \qquad\qquad !\top \cong 1$$

Réminiscent de $\wp(A+B) \cong \wp(A) \times \wp(B)$ dans $\mathbf{Ens}$.

Nous étudierons plus loin les propriétés catégoriques de l'exponentielle !. En particulier,

— chaque $!A$ définit un comonoïde $(!A, d_A, e_A)$ dans $\mathbf{Coh}$,

— l'exponentielle définit une comonade $(!, \delta, \epsilon)$ dans $\mathbf{Coh}$,

— la diagonale cartésienne $A \longrightarrow A\&A$ est transportée sur la diagonale comonoidale $!A \longrightarrow !A \otimes !A$.

exo. Montrer que les égalités $A \otimes (B\&C) \cong (A \otimes B)\&(A \otimes C)$ et $!(A \oplus B) \cong !A ⅋ !B$ sont fausses. Début d'un tableau de Mendeleiev! Effets des polarités, très importants par la suite.

Logique linéaire (LL)

$$A, B ::= A \oplus B \mid A \otimes B \mid !A \mid 0 \mid \mathbf{1} \mid A \& B \mid A \parr B \mid ?A \mid \top \mid \bot \mid \alpha$$

MALL+

contraction $$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

affaiblissement $$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}$$

déréliction $$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

renforcement $$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}$$

Monoïde

Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un monoïde est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xrightarrow{u} A \xleftarrow{m} A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A \otimes m"'] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "m \otimes A"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes A \arrow[r, "u \otimes A"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes 1 \arrow[l, "A \otimes u"'] \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Exemple: un monoïde dans $(\mathbf{Ens}, \times, 1)$.

Comonoïde

Dualement: Dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, un comonoïde est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xleftarrow{e} A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "d"] \arrow[d, "d"'] & & A \otimes A \arrow[d, "d\otimes A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "A\otimes d"] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes A) \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes A \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[l, "e\otimes A"'] \arrow[r, "A\otimes\eta"] & A \otimes 1 \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "d"] \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Comonoïde co-commutatif

Un comonoïde (A, d, e) dans une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \gamma)$ est dit co-commutatif lorsque

$$A \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{\gamma_{A,A}} A \otimes A \quad = \quad A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

Chaque objet $!A$ définit un comonoïde dans $\mathbf{Coh}$

L'espace de cohérence $!A$ est un comonoïde co-commutatif dans $\mathbf{Coh}$, lorsqu'on l'équipe des cliques suivantes:

— Un morphisme diagonal ou co-multiplication

$$!A \xrightarrow{d_A} !A \otimes !A$$

défini par

$$\{(u,(v,w)) \in |!A \multimap !A \otimes !A| \mid u = v \cup w\}$$

— Un morphisme d'affaiblissement ou co-unité

$$!A \xrightarrow{e_A} 1$$

défini par le singleton

$$\{(\varnothing, *)\}$$

Sémantique

En avant goût... dans la trame de $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.fx \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\{(a, b)\}, a, b)$

$$\lambda f :!(A \longrightarrow A).\lambda x : A.x \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\varnothing, a, a)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.f(fx) \quad : \quad !(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$$

est interprété en l'ensemble des points de la forme $(\{(a, b), (b, c)\}, a, c)$

V. Stabilité dans les espaces de cohérence.

Domaine associé à un espace de cohérence

A chaque espace de cohérence A on associe un domaine D_A:

— dont les éléments sont les cliques x de A,

— dont la relation d'ordre est l'inclusion entre clique:

$$x \leq_A y \iff x \subset y$$

Propriété: $(\mathsf{D}_A, \leq_A)$ est un domaine, c'est-à-dire un ensemble ordonné avec toutes les limites dirigées, et un plus petit élément donné par $\varnothing$.

Stabilité (rappel)

Une fonction

$$f : \mathsf{D}_A \longrightarrow \mathsf{D}_B$$

est stable lorsque:

— f est croissante: pour tout couple d'éléments x et y,

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

— f est continue: pour tout ensemble dirigé $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de D_A:

$$f(\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} f(x_i)$$

— f préserve les intersections d'éléments compatibles: pour tout couple x et y,

$$x \uparrow y \implies f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

où $x \uparrow y$ signifie qu'il existe un élément $z \in \mathsf{D}_A$ tel que $x \leq z$ et $y \leq z$.

Reformulation de la stabilité

Soit

$$f : \mathsf{D}_A \longrightarrow \mathsf{D}_B$$

une fonction stable.

On définit sa trace $\mathsf{Tr}(f)$ comme l'ensemble des couples

$$(x, b) \in \mathsf{D}_A \times |B|$$

tels que pour tout élément

$$x \leq z$$

on ait pour tout élément $y \leq z$:

$$x \leq y \iff b \leq f(y).$$

En particulier, $b \leq f(x)$.

Exo. Montrer par continuité de f que toute clique x telle que:

$$(x, b) \in \mathsf{Tr}(f)$$

est finie. En déduire que $\mathsf{Tr}(f)$ est un ensemble de sommets dans l'espace de cohérence $|!A \multimap B|$. Nous montrerons tout à l'heure que $\mathsf{Tr}(f)$ est une clique de $!A \multimap B$.

Reformulation de la stabilité (2)

Toute fonction stable f est caractérisée par sa trace.

En effet, l'image d'un élément x de D_A est donné par l'ensemble:

$$f(x) \;=\; \left\{\; b \in |B| \;\;\middle|\;\; \exists y \leq x,\; (y,b) \in \mathsf{Tr}(f) \;\right\}$$

Démonstration:

(1) $f(x) \supset \left\{\; b \in |B| \;\;\middle|\;\; \exists y \leq x,\; (y,b) \in \mathsf{Tr}(f) \;\right\}$ parce que si $(y,b) \in \mathsf{Tr}(f)$ pour une certaine clique $y \leq x$, alors:

$$b \leq f(y) \leq f(x).$$

(2) $f(x) \subset \left\{\; b \in |B| \;\;\middle|\;\; \exists y \leq x,\; (y,b) \in \mathsf{Tr}(f) \;\right\}$ parce que si b est un élément de la clique $f(x)$, on définit:

$$y = \bigwedge \left\{\; z \leq x \;\;\middle|\;\; b \leq f(z) \;\right\}.$$

La clique y est la clique minimum incluse dans x telle que:

$$b \leq f(y).$$

On utilise la stabilité pour montrer que cet élément y vérifie $(y,b) \in \mathsf{Tr}(f)$.

Reformulation de la stabilité (3)

La trace d'une fonction stable f est une clique de $!A \multimap B$.

Il suffit de vérifier que deux éléments (x_1, b_1) et (x_2, b_2) de la trace sont compatibles dans l'espace de cohérence $!A \multimap B$:

$$(x_1, b_1) \frown_{!A \multimap B} (x_2, b_2)$$

Pour cela, on doit démontrer que:

$$x_1 \frown_{!A} x_2 \quad \Longrightarrow \quad b_1 \frown_B b_2$$

et

$$b_1 \asymp_B b_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 \asymp_{!A} x_2.$$

Dans la direction "en avant": supposons que

$$x_1 \frown_{!A} x_2.$$

Dans ce cas, les éléments x_1 et x_2 sont majorés par un certaine clique $z \in \mathsf{D}_A$. D'où:

$$f(x_1) \leq f(z) \quad \text{et} \quad f(x_2) \leq f(z).$$

Or,

$$b_1 \in f(x_1) \quad \text{et} \quad b_2 \in f(x_2).$$

D'où b_1 et b_2 sont éléments de la même clique $f(z)$. Cela démontre que:

$$b_1 \frown_B b_2.$$

Reformulation de la stabilité (3)

Dans la direction “en arrière”: Supposons que

$$b_1 \asymp_B b_2$$

Deux cas se présentent.

(1) Soit $b_1 \smile_B b_2$. On déduit de la partie “en avant” que

$$x_1 \smile_{!A} x_2.$$

(2) Soit $b_1 = b_2 = b$. Si les deux cliques x_1 et x_2 sont compatibles dans $!A$:

$$x_1 \frown_{!A} x_2$$

on utilise le fait que f préserve les intersections compatibles, pour déduire que:

$$f(x_1) \cap f(x_2) = f(x_1 \cap x_2)$$

ce qui implique que

$$b \in f(x_1 \cap x_2).$$

On déduit que $x_1 = x_2$ par définition d’une trace. D’où:

$$b_1 = b_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 \asymp_{!A} x_2.$$

Reformulation de la stabilité (4)

Réciproquement, toute clique u de $!A \multimap B$ définit une fonction stable f, donnée par l'équation:

$$f(x) \;=\; \left\{\; b \in |B| \;\;\middle|\;\; \exists y \leq x,\; (y, b) \in u \;\right\}$$

On montre de plus que deux fonctions stables f et g sont ordonnées par l'ordre stable:

$$f \leq_s g$$

si et seulement

$$\mathsf{Tr}(f) \subset \mathsf{Tr}(g).$$

D'où l'idée de déduire la catégorie des espaces de cohérence et fonctions stables de la catégories des espaces de cohérence et cliques.

VI. Construction de Kleisli.

Construire une ccc à partir d'une smcc

Point de départ: la catégorie $\mathbf{Coh}$ des espaces de cohérence.

A la fois:

— catégorie cartésienne $(\mathbf{Coh}, \&, \top)$,

— catégorie symétrique monoïdale close $(\mathbf{Coh}, \otimes, 1, \multimap, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$.

Ici, nous allons utiliser l'exponentielle pour relier les mondes cartésien (dit additif) et monoïdal clos (dit multiplicatif).

Comonade.

Un comonade (T, δ, ϵ) dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'un foncteur $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,

— de deux transformations naturelles

$$\delta : T \longrightarrow T \circ T \qquad\qquad \epsilon : T \longrightarrow Id_{\mathcal{C}}$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & T \circ T \arrow[d, "T\circ\delta"] \\
T \circ T \arrow[r, "\delta\circ T"] & T \circ T \circ T
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & T \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta"] & T \arrow[d, equal] \\
T & T \circ T \arrow[l, "\epsilon\circ T"'] \arrow[r, "T\circ\epsilon"] & T
\end{tikzcd}$$

Catégorie de Kleisli

Soit (T, δ, ϵ) une comonade dans une catégorie $\mathcal{C}$. La catégorie de co-Kleisli $\mathcal{C}_T$ est définie de la manière suivante:

— ses objets sont les objets de $\mathcal{C}$,

— ses morphismes $A \dashrightarrow B$ sont les morphismes de $TA \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$,

Les identités $A \dashrightarrow A$ sont données par les morphismes $\epsilon_A : TA \longrightarrow A$.

On compose $f : A \dashrightarrow B$ et $g : B \dashrightarrow C$ de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
TTA \arrow[drr, "Tf"] & & & \\
TA \arrow[u, "\delta_A"] \arrow[drr, "f"] & & TB \arrow[drr, "g"] & \\
& & B & & C
\end{tikzcd}$$

exo. montrer que les identités sont des identités, et que la composition est associative.

Des produits dans $\mathcal{C}_T$

Théorème: Soit (T, δ, ϵ) une comonade dans une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \&, \top)$.

Alors, la catégorie $(\mathcal{C}_T, \&, \top)$ est cartésienne elle aussi.

Démonstration: En effet,

— $\top$ est terminal dans $\mathcal{C}_T$,

— $A\&B$ est le produit de A et B, lorsqu'on le munit des projections

$$A\&B \overset{\pi_1^\bullet}{\dashrightarrow} A \quad = \quad T(A\&B) \xrightarrow{\epsilon_{A\&B}} A\&B \xrightarrow{\pi_1} A$$

$$A\&B \overset{\pi_2^\bullet}{\dashrightarrow} B \quad = \quad T(A\&B) \xrightarrow{\epsilon_{A\&B}} A\&B \xrightarrow{\pi_2} B$$

En effet, tout couple de morphismes $X \dashrightarrow A$ et $X \dashrightarrow B$ de $\mathcal{C}_T$,

$$X \dashrightarrow A \;=\; T(X) \xrightarrow{f} A \qquad\qquad X \dashrightarrow B \;=\; T(X) \xrightarrow{g} B$$

définit un morphisme $X \dashrightarrow A\&B$ de $\mathcal{C}_T$,

$$X \dashrightarrow A\&B \;=\; T(X) \xrightarrow{(f,g)} A\&B$$

Des produits dans $\mathcal{C}_T$ (2)

Ce morphisme $X \overset{(f,g)}{\dashrightarrow} A\&B$ est une solution du problème:

$$X \overset{(f,g)}{\dashrightarrow} A\&B \dashrightarrow A \quad = \quad \begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[dr, "T(f,g)"] & & \\ T(X) \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[dr, "(f,g)"'] & T(A\&B) \arrow[d, "\epsilon_{A\&B}"] \arrow[dr, "\pi_1^\bullet"] & \\ & A\&B \arrow[r, "\pi_1"] & A \end{tikzcd} \quad = \quad X \overset{f}{\dashrightarrow} A$$

Pour en démontrer l'unicité, supposons que $h : X \dashrightarrow A\&B$ vérifie

$$X \overset{h}{\dashrightarrow} A\&B \overset{\pi_1^\bullet}{\dashrightarrow} A \;=\; X \overset{f}{\dashrightarrow} A \qquad\qquad X \overset{h}{\dashrightarrow} A\&B \overset{\pi_2^\bullet}{\dashrightarrow} B \;=\; X \overset{g}{\dashrightarrow} B$$

L'universalité de $A \overset{\pi_1}{\leftarrow} A\&B \overset{\pi_2}{\rightarrow} B$, et le diagramme suivant pour f (et pour g):

$$X \overset{h}{\dashrightarrow} A\&B \dashrightarrow A \quad = \quad \begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[dr, "Th"] & & \\ T(X) \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[dr, "h"'] & T(A\&B) \arrow[d, "\epsilon_{A\&B}"] \arrow[dr, "\pi_1^\bullet"] & \\ & A\&B \arrow[r, "\pi_1"] & A \end{tikzcd} \quad = \quad X \overset{f}{\dashrightarrow} A$$

caractérisent $h : T(X) \longrightarrow A\&B$ dans la catégorie $\mathcal{C}$, comme $h = (f,g)$.

La comonade $(!, \delta, \epsilon)$ dans $\mathbf{Coh}$

— La modalité ! définit un foncteur $! : \mathbf{Coh} \longrightarrow \mathbf{Coh}$.

Si $f : A \longrightarrow B$ est une clique, la clique $!f :!A \longrightarrow !B$ est définie par:

$$!f = \left\{ (u,v) \in |!A \multimap !B| \;\middle|\; \begin{array}{l} 1.\ \forall a \in u, \exists b \in v, (a,b) \in f \\ 2.\ \forall b \in v, \exists a \in u, (a,b) \in f \end{array} \right\}$$

— La modalité ! définit une comonade $(!, \delta, \epsilon)$.

Un morphisme de renforcement $\delta_A :!A \longrightarrow !!A$ défini par

$$\{(u,v) \in |!A \multimap !!A| \mid v = \{u_1, ..., u_n\}, u = u_1 \cup \cdots \cup u_n\}$$

Un morphisme de déréliction $\epsilon_A : A \longrightarrow !A$ défini par

$$\{(a, \{a\}) \mid a \in |A|\}$$

exo. vérifier les diagrammes comonadiques sur $(!, \delta, \epsilon)$.

Des additifs aux multiplicatifs, ou l'alchimie exponentielle

Fait: une famille d'isomorphismes naturels en A et B

$$!(A\&B) \cong !A \otimes !B \qquad\qquad !\top \cong 1$$

Théorème: la catégorie $(\mathbf{Coh}_!, \&, \top)$ est cartésienne close, avec exponentiation $(B \Rightarrow -)$ le foncteur

$$(!B \multimap -) : \mathbf{Coh}_! \longrightarrow \mathbf{Coh}_!$$

.

Démonstration:

Par le résultat qui précède, la catégorie $(\mathbf{Coh}_!, \&, \top)$ est cartésienne. L'existence d'une exponentiation $(!B \multimap -) : \mathbf{Coh}_! \longrightarrow \mathbf{Coh}_!$ pour chaque objet B de $\mathbf{Coh}_!$ est établi par la série de bijections naturelles en A et C suivante.

$$\begin{array}{ccc}
A\&B & \dashrightarrow & C \\ \hline
!(A\&B) & \longrightarrow & C \\ \hline
!A \otimes !B & \longrightarrow & C \\ \hline
!A & \longrightarrow & !B \multimap C \\ \hline
A & \dashrightarrow & !B \multimap C
\end{array}$$

VII. Modalité exponentielle.

Exponentielle

Une modalité exponentielle dans une catégorie symétrique monoidale et cartésienne, est la donnée de:

— un comonoide commutatif pour tout objet A,

$$1 \xleftarrow{e} !A \xrightarrow{d} !A \otimes !A$$

— un morphisme $\epsilon_A : !A \longrightarrow A$ appelé déreliction, tel que pour tout morphisme

$$f : !A \longrightarrow B$$

il existe un et un seul morphisme comonoidal $g : !A \longrightarrow !B$ qui fasse commuter:

$$\begin{tikzcd} & !B \arrow[dd, "\epsilon_B"] \\ !A \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

— d'isomorphismes comonoidaux:

$$!(A \& B) \cong !A \otimes !B \longrightarrow A \qquad !\top \cong 1$$

Théorème 1

Munie d'une structure exponentielle:

Une catégorie $*$-autonome et cartésienne définit un modèle de LL

Une catégorie sym. monoidale close et cartésienne définit un modèle de ILL.

Théorème 2

Le point d’exclamation des espaces de cohérence définit une modalité exponentielle.

VIII. En avant-goût: les jeux.

Interprétation de l'entier de Church 0 dans $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f : !(A \multimap A).\lambda x : A.x$$

$$\begin{array}{cccccccc}
! & (A & \multimap & A) & \multimap & (A & \multimap & A) \\
 & & & & & & & q \\
 & & & & & q & & \\
 & & & & & k & & \\
 & & & & & & & k
\end{array}$$

Interprétation de l’entier de Church 1 dans $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \longrightarrow A).\lambda x : A.fx$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
! & (A & \multimap & A) & \multimap & (A & \multimap & A) \\
 & & & & & & & q \\
 & & & (q,1) & & & & \\
 & (q,1) & & & & & & \\
 & & & & & q & & \\
 & & & & & k & & \\
 & (k,1) & & & & & & \\
 & & & (f(k),1) & & & & \\
 & & & & & & & f(k)
\end{array}$$

Interprétation de l’entier de Church 2 dans $!(A \multimap A) \multimap (A \multimap A)$

$$\lambda f :!(A \multimap A).\lambda x : A.f(fx)$$

$!$	$(A$	$\multimap$	$A)$	$\multimap$	$(A$	$\multimap$	$A)$
							q
			$(q,1)$				
	$(q,1)$						
			$(q,2)$				
	$(q,2)$						
					q		
					k		
	$(k,2)$						
			$(f(k),2)$				
	$(f(k),1)$						
			$(f(f(k)),1)$				
							$f(f(k))$