

Titre

Modèles des langages de programmation
Domaines, catégories, jeux

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique
Cours M2.2

www.pps.jussieu.fr/~mellies/master.html

Programme de cette séance:

Modèle ensembliste du lambda-calcul ;
Catégories cartésiennes fermées

Plan de la séance

- 1— le λ -calcul simplement typé,
- 2— le modèle ensembliste du λ -calcul simplement typé,
- 3— la structure catégorique de \mathbf{Ens} : catégories et foncteurs,
- 4— la structure catégorique de \mathbf{Ens} : ccc,
- 5— interprétation du λ -calcul simplement typé dans une ccc,
- 6— exemples de cccs.

I. Le λ -calcul simplement typé

Curry 1958: le λ -calcul simplement typé

Il est possible de **typer** certaines expressions du λ -calcul au moyen de types simples A, B construits par la grammaire:

$$A, B ::= \alpha \mid A \Rightarrow B.$$

On appelle **contexte de typage** Γ une suite finie $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)$ où x_i est une variable et A_i est un type simple, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On appelle **séquent** un triplet:

$$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash P : B$$

où $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ est un contexte de typage, P est un λ -terme et B est un type simple.

Curry 1958: le λ -calcul simplement typé

Variable

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x. P : A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Propriétés remarquables du fragment simplement typé

Un λ -terme P est appelé **simplement typé** lorsqu'il existe un contexte de typage Γ et un type simple A tels que:

$$\Gamma \vdash P : A$$

On démontre que l'ensemble des λ -termes simplement typés est clos par β -réduction:

Subject Reduction: Si $\Gamma \vdash P : A$ et $P \longrightarrow_{\beta} Q$, alors $\Gamma \vdash Q : A$.

Un λ -terme P est appelé **fortement normalisable** lorsque tous les chemins de β -réduction:

$$P \longrightarrow_{\beta} P_1 \longrightarrow_{\beta} P_2 \longrightarrow_{\beta} \cdots \longrightarrow_{\beta} P_n \longrightarrow_{\beta} \cdots$$

terminent.

Normalisation forte: Si P est simplement typé alors P est fortement normalisable.

En particulier, le λ -terme $\Delta\Delta$ qui boucle n'est pas simplement typé.

Curry-Howard (1)

Logique minimale intuitioniste

Variable

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$$

Curry-Howard (1)

λ -calcul simplement typé

Variable	$\frac{}{x : A \vdash x : A}$
Abstraction	$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x. P : A \Rightarrow B}$
Application	$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$
Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$
Contraction	$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$
Permutation	$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$

Isomorphisme de Curry-Howard (2)

λ -calcul simplement typé \simeq logique minimale intuitioniste

Une remarque qui pourrait n'avoir qu'une portée mineure... pourtant:

Logique constructive: L'assistant de démonstration **CoQ** développé à l'INRIA est basé sur un langage de type extrêmement raffiné, avec des types **polymorphes** et **dépendants**. Permet de **certificier** une démonstration et d'en **extraire** un programme OCaml.

Logique classique: La logique classique est aussi constructive! à condition d'ajouter un opérateur de contrôle **call-cc** à la syntaxe du λ -calcul. L'opérateur permet de mettre en mémoire l'environnement du λ -terme (= la pile, la continuation) et d'y revenir plus tard dans l'évaluation.

Théorie des ensembles: Jean-Louis Krivine (PPS) interprète tous les axiomes de la théorie des ensembles (sauf l'axiome du choix) dans un modèle de **réalisabilité** fondé sur le λ -calcul avec contrôle.

Encore, et encore, et encore...

II. L'interprétation ensembliste du λ -calcul

Interprétation ensembliste

On associe un ensemble X_α à chaque type atomique α .

Ensuite, on étend l'interprétation à tous les types:

$$\llbracket \alpha \rrbracket = X_\alpha \quad \llbracket A \Rightarrow B \rrbracket = \llbracket B \rrbracket^{\llbracket A \rrbracket} = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$$

Un séquent

$$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash M : B$$

est interprété comme une fonction

$$\llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket \longrightarrow \llbracket B \rrbracket$$

Propriété remarquable: “soundness” pour les règles β et η

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$\llbracket \Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B \rrbracket = \llbracket \Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B \rrbracket$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$\llbracket \Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash M : A \Rightarrow B \rrbracket$$

III. La structure catégorique des ensembles

Catégories et foncteurs

Catégories

Une catégorie \mathcal{C} est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A, B)$ de **morphismes** pour tout couple d'objets (A, B) ,

— d'une **loi de composition** $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme **identité** $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$ pour tout objet A ,

1— tel que \circ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D), \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes *id* soient éléments neutre de \circ

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B), \quad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$.

Exemples

1. La catégorie **Ens** des ensembles et fonctions.

2. Tout ensemble ordonné (X, \leq) définit une catégorie par:

$$x \longrightarrow y \text{ ssi } x \leq y.$$

3. La catégorie des domaines et fonctions continues,

4. La catégorie dont les objets sont les jeux alternés A où Opposant commence, et les flèches les stratégies séquentielles de $A \multimap B$,

5. Un grand nombre d'autres exemples en sémantique.

Catégorie duale

Prendre une catégorie \mathcal{C} , et changer la direction de toutes les flèches: voilà définie la catégorie duale \mathcal{C}^{op} .

Catégorie produit

Le **produit** de deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est la catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

— dont les objets sont les couples (A, B) d'objets de \mathcal{C} et \mathcal{D} ,

— dont les morphismes $(A, B) \longrightarrow (A', B')$ sont les couples de morphismes (f, g)

$$f : A \longrightarrow A' \qquad g : B \longrightarrow B'$$

avec composition et identités définis de la manière attendue:

$$(A, B) \xrightarrow{id_{(A,B)}} (A, B) \qquad = \qquad (A, B) \xrightarrow{(id_A, id_B)} (A, B)$$

$$(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (A', B') \xrightarrow{(f',g')} (A'', B'') \qquad = \qquad (A, B) \xrightarrow{(f' \circ f, g' \circ g)} (A'', B'')$$

Foncteur

Un **foncteur** F d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} est la donnée:

— d'un objet FA de \mathcal{D} pour tout objet A de \mathcal{C} ,

— d'une fonction $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ pour tout couple d'objets (A, B) de \mathcal{C} .

On demande que F préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \quad = \quad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \quad = \quad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

Exemple de catégorie et foncteur (1)

Un monoïde (M, \cdot, e) est un ensemble M muni d'une loi produit et d'un élément neutre, tels que:

$$\begin{array}{ll} \text{Associativité} & \forall x, y, z \in M, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ \text{Unité} & \forall x \in M, \quad x \cdot e = x = e \cdot x. \end{array}$$

Un homomorphisme f de (M, \cdot, e) dans (N, \bullet, u) est une fonction $f : M \longrightarrow N$ qui préserve les identités:

$$f(e) = u,$$

et préserve les produits:

$$\forall x, y \in M, \quad f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y).$$

exo. Identifier tout monoïde (M, \cdot, e) à une catégorie $[M, \cdot, e]$ à un seul objet. Etablir une bijection entre les homomorphismes de (M, \cdot, e) dans (N, \bullet, u) et les foncteurs de $[M, \cdot, e]$ dans $[N, \bullet, u]$.

Exemple de catégorie et foncteur (2)

La catégorie **Mon** a pour objets les **monoïdes** et pour flèches les **homomorphismes** entre monoïdes.

On définit un foncteur

$$U : \mathbf{Mon} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

qu'on appelle **foncteur d'oubli**, comme suit:

- à chaque monoïde (M, \cdot, e) on associe son support $U(M, \cdot, e) = M$,
- à chaque homomorphisme f de (M, \cdot, e) vers (N, \bullet, u) , on associe la fonction sous-jacente $f : M \longrightarrow N$.

exo. Montrer que U définit un foncteur.

Isomorphisme

Supposons donnée une catégorie \mathcal{C} .

Un morphisme

$$f : A \longrightarrow B$$

est appelé **isomorphisme** lorsqu'il existe un morphisme

$$g : B \longrightarrow A$$

vérifiant

$$g \circ f = id_A \quad \text{et} \quad f \circ g = id_B.$$

exo. Montrer que $f; g : A \longrightarrow C$ est un isomorphisme lorsque $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont des isomorphismes.

exo. Montrer que tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ transporte les isomorphismes de \mathcal{C} en isomorphismes de \mathcal{D} .

Bifoncteur

Un **bifoncteur** F de deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} vers une catégorie \mathcal{E} est la donnée:

— d'un foncteur $F(A, -)$ de \mathcal{D} vers \mathcal{E} pour tout objet A de \mathcal{C} ,

— d'un foncteur $F(-, B)$ de \mathcal{C} vers \mathcal{E} pour tout objet B de \mathcal{D} ,

tels que pour tous morphismes $f : A \longrightarrow A'$ de \mathcal{C} et $g : B \longrightarrow B'$ de \mathcal{D} , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F(A, B) & \xrightarrow{F(A, g)} & F(A, B') \\ \downarrow F(f, B) & & \downarrow F(f, B') \\ F(A', B) & \xrightarrow{F(A', g)} & F(A', B') \end{array} \quad (1)$$

commute.

Notation: $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$,

Remarque. Le diagramme (1) permet d'écrire $F(f, g) : A \times B \longrightarrow A' \times B'$.

exo. Montrer que bifoncteur de \mathcal{C} et \mathcal{D} vers \mathcal{E} et foncteur de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ vers \mathcal{E} sont deux notions équivalentes. Ce qui justifie la notation.

IV. La structure catégorique des ensembles

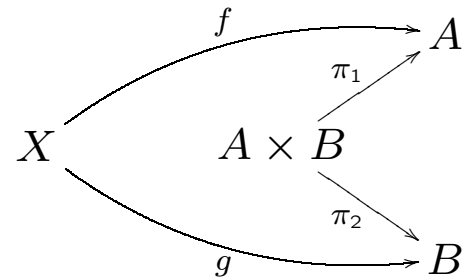
Catégories cartésiennes fermées

Produits

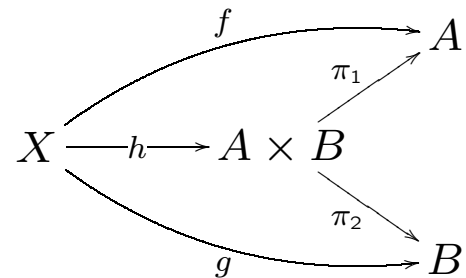
Le **produit** de deux objets A et B dans une catégorie \mathcal{C} , est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \quad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme



il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme



exo. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près. (Cela est vrai plus généralement de toute définition **universelle**: limite, colimite, etc...)

Exemples de produits

1. Le produit cartésien dans la catégorie \mathbf{Ens} ,
2. La borne inférieure dans un ensemble ordonné (X, \preceq) ,
3. Le produit $A \& B$ de deux jeux alternés, dans la catégorie de jeux sus-mentionnée.

Objet terminal

Un objet 1 est **terminal** dans la catégorie \mathcal{C} lorsque $\text{Hom}(A, 1)$ est singleton, pour tout objet A .

On peut considérer que 1 est le produit “vide” de \mathcal{C} .

Exemple 1. Le singleton $\{*\}$ dans la catégorie \mathbf{Ens} ,

Exemple 2. Le maximum dans un ensemble ordonné (X, \preceq)

Exemple 3. Le jeu \perp avec $M_{\perp} = \emptyset$ dans les jeux alternés où Opposant commence.

exo. Montrer que dans une catégorie qui contient un objet terminal 1 , tout objet est produit de 1 et de lui-même.

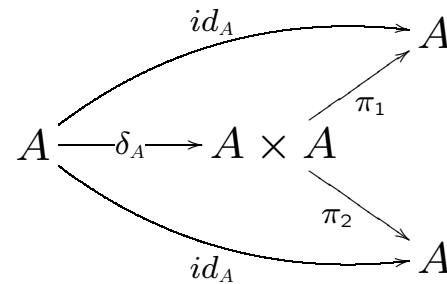
Catégorie cartésienne

Une **catégorie cartésienne** $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$ est une catégorie \mathcal{C} équipée d'un produit $A \times B$ pour tout couple d'objets, et d'un objet terminal $\mathbf{1}$.

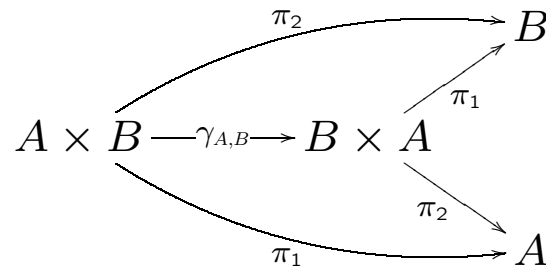
Dans toute catégorie cartésienne,

— effacement $\epsilon_A : A \longrightarrow \mathbf{1}$,

— diagonale $\delta_A : A \longrightarrow A \times A$ obtenue par



— symétrie $\gamma_{A,B} : A \times B \longrightarrow B \times A$ obtenue par



exo. Montrer que $(- \times -)$ définit un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ unique.

Catégories cartésienne fermée

Première définition

Exponentiation cartésienne

Soit B un objet dans une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$.

On appelle **exponentiation cartésienne** de A le couple formé par un foncteur $(A \Rightarrow -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et une famille $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ de bijections indexée par des objets B, C de \mathcal{C} :

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \Rightarrow C)$$

naturelle en B et C .

Naturelle en B et C signifie que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{g} & C \\ \uparrow A \times h_B & & \downarrow h_C \\ A \times B' & \xrightarrow{f} & C' \end{array}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi_{A,B,C}(g)} & A \Rightarrow C \\ \uparrow h_B & & \downarrow A \Rightarrow h_C \\ B' & \xrightarrow{\phi_{A,B',C'}(f)} & A \Rightarrow C' \end{array}$$

Ccc

Une **catégorie cartésienne close** (ccc) est une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$ munie d'une exponentiation cartésienne

$$\frac{A \times B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \Rightarrow C} \phi_{A,B,C} \quad (2)$$

pour tout objet A .

Théorème du paramètre

Nous avons vu que le produit $(- \times -)$ définit un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. De même:

Théorème du paramètre [MacLane]

La famille d'exponentiations $(A \Rightarrow -)_A$ définit un unique bifoncteur

$$(- \Rightarrow -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tel que les bijections $\phi_{A,B,C}$ soient naturelles en A , B et C .

Naturelle en A , B et C signifie que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{A,B,C}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{g} & C \\ \uparrow h_A \times h_B & & \downarrow h_C \\ A' \times B' & \xrightarrow{f} & C' \end{array}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi_{A,B,C}(g)} & A \Rightarrow C \\ \uparrow h_B & & \downarrow h_{A \Rightarrow C} \\ B' & \xrightarrow{\phi_{A',B',C'}(f)} & A' \Rightarrow C' \end{array}$$

Catégories cartésienne fermée

Deuxième définition

Ccc

Une catégorie cartésienne fermée est une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$ et la donnée pour tout objet A et B :

— d'un objet $A \Rightarrow B$ appelé **espace fonctionnel** de A vers B ,

— d'un morphisme $eval_{A,B} : A \times (A \Rightarrow B) \longrightarrow B$ appelé **morphisme d'évaluation**,

vérifiant que pour tout objet X et morphisme $f : A \times X \longrightarrow B$, il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \Rightarrow B$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \times (A \Rightarrow B) & \xrightarrow{eval_{A,B}} & B \\ \uparrow A \times h & \nearrow f & \\ A \times X & & \end{array}$$

commute.

V. Interprétation du λ -calcul dans une CCC

Curry 1958: le λ -calcul simplement typé

Variable	$\frac{}{x : A \vdash x : A}$
Abstraction	$\frac{x : A, \Gamma \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x. P : A \Rightarrow B}$
Application	$\frac{\Gamma \vdash Q : A \quad \Delta \vdash P : A \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$
Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash P : B}{x : A, \Gamma \vdash P : B}$
Contraction	$\frac{x : A, y : A, \Gamma \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$
Permutation	$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$

Interprétation du λ -calcul

Variable: $A \xrightarrow{id_A} A$

Lambda: $A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{A,\Gamma,B}(f)} A \Rightarrow B$

Application: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} A \Rightarrow B$ deviennent

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times g} A \times (A \Rightarrow B) \xrightarrow{eval_{A,B}} B$$

Contraction: $A \times A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $A \times \Gamma \xrightarrow{\delta_{A \times \Gamma}} A \times A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$

Affaiblissement: $\Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $A \times \Gamma \xrightarrow{\epsilon_{A \times \Gamma}} 1 \times \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma \xrightarrow{f} B$

Permutation: $\Gamma \times A \times B \times \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \times B \times A \times \Delta \xrightarrow{\Gamma \times \gamma_{A,B} \times \Delta} \Gamma \times A \times B \times \Delta \xrightarrow{f} B$$

Théorème de validité

Théorème (“soundness”):

L’interprétation du λ -calcul simplement typée est correcte dans toute ccc.

Autrement dit, si \mathcal{C} est une ccc et $\llbracket - \rrbracket$ est son crochet d’interprétation,

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$\llbracket \Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B \rrbracket = \llbracket \Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B \rrbracket$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$\llbracket \Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash M : A \Rightarrow B \rrbracket$$

exo. Démontrer le théorème ci-dessus.

VI. Exemples de CCC — et linéarisation

Pourquoi introduire les cccs?

Disons que pour les ensembles et fonctions, c'était assez facile.

Mais, il est parfois difficile de savoir si une interprétation donne véritablement un modèle.

Exemples:

- domaines de Scott et **fonctions continues**,
- domaines de Berry et **fonctions stables**,
- structures de données concrètes, et **algorithmes séquentiels** (Berry+Curien),
- jeux alternés où Opposant commence, et **stratégies séquentielles**.

Aussi: permet ensuite d'analyser la logique par la voie catégorique!

Catégories symétriques **monoïdales** closes, **comonades**, **construction de Kleisli...**

Linéarisation

A l'origine de la logique linéaire (1986)...

La décomposition linéaire du modèle des fonctions stables de Berry.

Depuis, d'autres telles linéarisations ont été opérées:

dl-domaines avec cohérence
et fonctions fortement stables
Bucciarelli-Ehrhard 1991

⇒

Espace
d'hypercohérence
Ehrhard 1993

Bidomaines
Berry 1979

⇒

Bistructures
Curien-Plotkin-Winskel 1996

Structures
de données concrètes
Berry-Curien 1985

⇒

Jeux
Lamarche 1992

Bibliographie sommaire

J-Y. Girard. *Advances in LL*, Cambridge University Press, 1995.

Linear Logic: its syntax and its semantics.

Plus qu'une introduction à la logique linéaire.

S. Abramsky and G. McCusker. *Computational Logic*, Springer 1999.

Game Semantics.

Présentation pédagogique des différentes classes de stratégie sur les jeux à arène, et les théorèmes de "full abstraction".

P-A. Melliès. A paraître dans TCS.

Categorical models of linear logic revisited

<http://www.pps.jussieu.fr/~mellies/papers.html/>

Expose les différentes définitions catégoriques de l'exponentielle.

S. MacLane. Springer Verlag, 1971.

Categories for the working mathematician.

Surtout pour les chapitres IV, VI et VII.