Université Paris 7 - MPRI M2 Année 2006-2007

TD de *Modèles des langages de programmation: domaines, catégories, jeux* n° 4
(Correction)

Collapse extensionnel et PCF-théories

Soient $\{D^\sigma\}, \{E^\sigma\}$ modèles de PCF (que l'on notera aussi simplement D, E).
Une relation logique binaire $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ entre $\{D^\sigma\}$ et $\{E^\sigma\}$ est:

- une *fonction partielle logique* si, pour tout type σ et pour tout $d \in D^\sigma$, si $d\mathscr{R}^\sigma e_1$ et $d\mathscr{R}^\sigma e_2$ alors $e_1 = e_2$.
- *surjective* si , pour tout type σ et pour tout $e \in E^\sigma$, il existe d tel que $d\mathscr{R}^\sigma e$.

Exercice 1 Montrer que:

- si $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction partielle logique entre les modèles D et E, alors $Th(D) \subseteq Th(E)$, où $Th(D)$ désigne le relation d'équivalence induite sur l'ensemble des termes clos de PCF par la fonction d'interprétation $[\![\ ]\!]^D$.
- si $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction partielle aux types de bases, et $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est surjective alors $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction partielle logique.

Correction : a) si $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction partielle logique entre les modèles D et E, et, pour deux termes clos $M,N : \sigma$, $[\![M]\!]^D = [\![N]\!]^D$, alors:
$[\![M]\!]^D R^\sigma [\![M]\!]^E$
et
$[\![N]\!]^D R^\sigma [\![N]\!]^E$
par le lemme fondamentale des rel. log., donc
$[\![M]\!]^E = [\![N]\!]^E$
car $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction partielle logique.
b) Par induction sur le type: pour σ type de base, $\mathscr{R}^\sigma$ est une fonction partielle par hp.
Soit $f \in C^{\sigma\to\tau}$ tel que $f\mathscr{R}^{\sigma\to\tau}g_1$ et $f\mathscr{R}^{\sigma\to\tau}g_2$.
Par extensionalité de E, il suffit de montrer que pour tout $y \in E^\sigma$ $g_1(y) = g_2(y)$. Ceci est une conséquence de la surjectivité de $\mathscr{R}^\sigma$, et de l'hp. inductive au type τ/

Le *collapse extensionnel de D sur E*, $\{\mathscr{E}^\sigma_{(D,E)}\}$, est la relation logique qui aux types de bases est l'identité.

Soient $\{C^\sigma\}, \{S^\sigma\}$ les modèles continu et stable, respectivement.

Exercice 2 Montrer que:

- ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(S,C)}\}$, ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(C,S)}\}$ sont des relations surjectives.
- ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(S,C)}\}$, ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(C,S)}\}$ sont des fonction partielles logiques
- $Th(S) \not\subset Th(C)$ et $Th(C) \not\subset Th(S)$.

Correction :

1) non surjectivité de $\{\mathscr{E}^{\sigma}_{(S,C)}\}$: la fonction *por* : $bool \to bool \to bool$ (voir le cours 2) n'est pas dans l'image de $\mathscr{E}$.

non surjectivité de $\{\mathscr{E}^{\sigma}_{(C,S)}\}$: la fonction *st* : $(bool \to bool) \to bool$ (voir le cours 3) n'est pas dans l'image de $\mathscr{E}$.

2) $\{\mathscr{E}^{\sigma}_{(S,C)}\}$ n'est pas une fonction partielle: on considère les termes "gouteurs de por" du cours 2, M et N, et on prouve que $[\![\lambda x.\Omega]\!]^S \mathscr{R} [\![M]\!]^C$ et $[\![\lambda x.\Omega]\!]^S \mathscr{R} [\![N]\!]^C$

$\{\mathscr{E}^{\sigma}_{(C,S)}\}$ n'est pas une fonction partielle: on considère les termes "gouteurs de st" du cours 3, P et Q, et on prouve que $[\![\lambda x.\Omega]\!]^C \mathscr{R} [\![P]\!]^S$ et $[\![\lambda x.\Omega]\!]^C \mathscr{R} [\![Q]\!]^S$

3) une équation vrai dans S et fausse dans C: $M = N$.

une équation vrai dans C et fausse dans S: $P = Q$.

Un *topped cpo* est un cpo D qui possède un plus grand élément, noté $\top_D$.

Exercice 3 Montrer que la catégorie Top des topped cpo et fonctions continues ordonnés point à point est une ccc enrichie de cpo.

Correction : .....

Soit $\{T^{\sigma}\}$ le modèle (non standard) issu de la catégorie Top, où T^{bool} et T^{int} sont les cpo plats usuel auquels on ajoute un plus grand élément: $\top_{bool}, \top_{int}$ respectivement.

Exercice 4

- Définir l'interprétation des constantes de PCF dans T.
- Exhiber une équation entre termes de PCF vrai dans le modèle continu et fausse dans T.
- Le collapse extensionnel de T sur C, $\mathscr{E}_{(T,C)}$, est la relation logique qui aux types de bases est la relation inverse de l'inclusion de C^{bool} dans T^{bool} et de C^{int} dans T^{int}, respectivement. Montrer que cette relation logique est surjective (utiliser le fait que tout élément de C est *por*-définissable).
- Conclure que $Th(T) \subset Th(C)$.

Correction :

1) la sémantique du `if` dans T:

$$[\![\mathtt{if}]\!]^T xyz = \begin{cases} \bot & \text{si } x = \bot \\ y & \text{si } x = tt \\ z & \text{si } x = ff \\ \top & \text{si } x = \top \end{cases}$$

(analoguement pour les autres constantes).

la sémantique du `por` dans T:

$$[\![\mathtt{por}]\!]^T xy = \begin{cases} tt & \text{si } x = tt \text{ ou } y = tt \\ z & \text{si } x = ff \text{ et } y = ff \\ \top & \text{si } x = \top \text{ ou } y = \top \\ \bot & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $f \in C^{\sigma}$. A voir: il existe $g \in T^{\sigma}$ t.q. $g\mathscr{E}_{(T,C)} f$. Soit M un terme de PCF parallèle tel que $[\![M]\!]^C = f$ (un tel M existe par le th. de d'éfinissabilité vu au cours 2). Par le lemme fondamentale, on a $[\![M]\!]^T \mathscr{E}_{(T,C)} f$.