Université Paris 7 - MPRI M2 Année 2006-2007

TD de *Modèles des langages de programmation: domaines, catégories, jeux*
n° 4

Collapse extensionnel et PCF-théories

Soient $\{D^\sigma\}, \{E^\sigma\}$ modèles de PCF (que l'on notera aussi simplement D, E).
Une relation logique binaire $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ entre $\{D^\sigma\}$ et $\{E^\sigma\}$ est:

- une *fonction partielle logique* si, pour tout type σ et pour tout $d \in D^\sigma$, si $d\mathscr{R}^\sigma e_1$ et $d\mathscr{R}^\sigma e_2$ alors $e_1 = e_2$.
- *surjective* si , pour tout type σ et pour tout $e \in E^\sigma$, il existe d tel que $d\mathscr{R}^\sigma e$.

Exercice 1 Montrer que:

- si $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction logique partielle entre les modèles D et E, alors $Th(D) \subseteq Th(E)$, où $Th(D)$ désigne le relation d'équivalence induite sur l'ensemble des termes clos de PCF par la fonction d'interprétation $[\![\ ]\!]^D$.
- si $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction partielle aux types de bases, et $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est surjective alors $\{\mathscr{R}^\sigma\}$ est une fonction partielle logique.

Le *collapse extensionnel de D sur E*, $\{\mathscr{E}^\sigma_{(D,E)}\}$, est la relation logique qui aux types de bases est l'identité.
Soient $\{C^\sigma\}, \{S^\sigma\}$ les modèles continu et stable, respectivement.

Exercice 2 Montrer que:

- ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(S,C)}\}$, ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(C,S)}\}$ sont des relations surjectives.
- ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(S,C)}\}$, ni $\{\mathscr{E}^\sigma_{(C,S)}\}$ sont des fonction partielles logiques
- $Th(S) \not\subset Th(C)$ et $Th(C) \not\subset Th(S)$.

Un *topped cpo* est un cpo D qui possède un plus grand élément, noté $\top_D$.

Exercice 3 Montrer que la catégorie Top des topped cpo et fonctions continues ordonnés point à point est une ccc enrichie de cpo.

Soit $\{T^\sigma\}$ le modèle (non standard) issu de la catégorie Top, où T^{bool} et T^{int} sont les cpo plats usuel auquels on ajoute un plus grand élément: $\top_{bool}, \top_{int}$ respectivement.

Exercice 4

- Définir l'interprétation des constantes de PCF dans T.
- Exhiber une équation entre termes de PCF vrai dans le modèle continu et fausse dans T.
- Le collapse extensionnel de T sur C, $\mathscr{E}_{(T,C)}$, est la relation logique qui aux types de bases est la relation inverse de l'inclusion de C^{bool} dans T^{bool} et de C^{int} dans T^{int}, respectivement. Montrer que cette relation logique est surjective (utiliser le fait que tout élément de C est *por*-définissable).
- Conclure que $Th(T) \subset Th(C)$.