TD de *Modèles des langages de programmation: domaines, catégories, jeux*
n° 3

Espaces de cohérence

Un *espace de cohérence* $A = (|A|, \stackrel{\frown}{\smile}_A)$ est un ensemble $|A|$ muni d'une relation binaire $\stackrel{\frown}{\smile}_A$ reflexive et symétrique sur $|A|$, la *cohérence*. Une *clique* de l'espace de cohérence A est un sous-ensemble $a \subseteq |A|$ tel que, pour tout $x,y \in a$, $x \stackrel{\frown}{\smile}_A y$. On note D_A l'ensemble des cliques de A.

Exercice 1 Montrer que, si A est un espace de cohérence, $(D_A, \subseteq)$ est un dI-domaine.

On définit l'espace de cohérence $!A$ par:

- $|!A| = \mathscr{K}(D_A)$
- $a \stackrel{\frown}{\smile}_{!A} b$ si $a \cup b \in D_A$.

Pour A_1, A_2 espaces de cohérence, on définit $A_1 \times A_2$ par:

- $|A_1 \times A_2| = |A_1| + |A_2| = \{(1,a) \mid a \in |A_1|\} \cup \{(2,a) \mid a \in |A_2|\}$
- $(i,x) \stackrel{\frown}{\smile}_{A_1 \times A_2} (j,y)$ ssi
  - $i = j$ et $x \stackrel{\frown}{\smile}_{A_i} y$ ou
  - $i \neq j$

Notation: si a est une clique de $A_1 \times A_2$, on écrit $a = (a_1,a_2)$ où $a_i = \{x \mid (i,x) \in a\}$.
Pour A, B espaces de cohérence, on définit $A \to B$ par:

- $|A \to B| = |!A| \times |B|$
- $(a,x) \stackrel{\frown}{\smile}_{A \to B} (b,y)$ ssi
  - $a \stackrel{\frown}{\smile}_{!A} b \Rightarrow x \stackrel{\frown}{\smile}_B y$ et
  - $a \frown_{!A} b \Rightarrow x \frown_B y$

Exercice 2 Montrer que l'ensemble des fonctions stables de D_A vers D_B ordonné par l'ordre stable est isomorphe à $(D_{A \to B}, \subseteq)$.

Soit $trace(f)$ la clique de $A \to B$ associé par cet isomorphisme à la fonction stable f de D_A dans D_B, et reciproquement soit $func(c)$ la fonction associée à la clique c.

Exercice 3 Montrer que la fonction *eval* de $D_{(A \to B) \times A}$ dans D_B définie par $eval(c,a) = (func(c))(a)$ est stable.

Exercice 4 Montrer que si f de $D_{A \times B}$ vers D_C est stable, alors pour tout $a \in D_A$ la fonction f^a de D_B vers D_C définie par $f^a(b) = f(a,b)$ est stable. De plus, la fonction Λf de D_A vers $D_B \to D_C$ définie par $(\Lambda f)(a) = f^a$ est stable.

Exercice 5 Conclure que la catégorie des espaces de cohérence et fonctions stables est cartesienne close.