Université Paris 7 - MPRI M2 Année 2006-2007

TD de *Modèles des langages de programmation: domaines, catégories, jeux*
n° 1

Le modèle de Scott de PCF

Rappels:

- Un sous-ensemble Δ d'un ensemble ordonné $(D, \leq)$ est *dirigé* s'il est non vide et si pour tout $x,y \in \Delta$ il existe $z \in \Delta$ tel que $x \leq z$ et $y \leq z$.
- Le *sup* d'un ensemble dirigé $\Delta \subseteq D$, (noté $\bigvee \Delta$), est le plus petit élément de D qui majore tous les éléments de Δ.
- Un *cpo* $(D, \leq)$ est un ordre partiel qui possède un plus petit élément, noté $\bot_D$, et qui est tel que tout ensemble $\Delta \subseteq D$ dirigé a un sup.
- Un élément $d \in D$ est *compact* si, pour tout $\Delta \subseteq D$ dirigé, si $d \leq \bigvee \Delta$ alors il existe $c \in \Delta$ tel que $d \leq c$.
- Un cpo $(D, \leq)$ est *algébrique* si pour tout $x \in D$ l'ensemble K_x des minorants compacts de x est dirigé, et $x = \bigvee K_x$.
- Un *domaine de Scott* est un cpo algébrique $(D, \leq)$ tel que tout ensemble $B \subseteq D$ borné (i.e. tel qu'il existe dans D un élément qui majore tous les éléments de B) a un sup (cette propriété s'appelle *complétude sous condition*).
- Soient $(D, \leq)$, $(E, \preceq)$ cpo; une fonction $f : D \to E$ est *continue* si elle est monotone (i.e. telle que si $x \leq y$ alors $f(x) \preceq f(y)$), et si pour tout $\Delta \subseteq D$ dirigé, $f(\bigvee \Delta) = \bigvee f(\Delta)$ (où $f(\Delta)$ dénote $\{f(x) \mid x \in \Delta\}$).

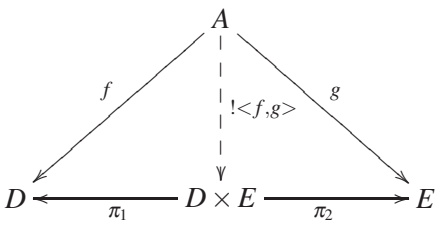
Exercice 1 Donner un exemple de

1. Un ordre partiel avec $\bot$ qui n'est pas un cpo.
2. Un cpo qui n'est pas algébrique.
3. Un cpo algébrique qui n'est pas complet sous condition.
4. Un domaine de Scott.
5. Une fonction monotone mais non pas continue entre deux cpo.

Exercice 2 Montrer que cpo et fonctions continues forment une catégorie (a voir: existence des idéntités, existence et associativité de la composition). On note **CPO** cette catégorie.

Exercice 3 Vérifier que **CPO** possède un objet terminal (a voir: existence d'un objet T tel que pour tout objet D il existe une unique fonction continue $1_D : D \to T$).

Exercice 4 Soient $(D, \leq)$, $(E, \preceq)$ cpo. On définit $(D \times E, \leq_\times)$ par:
$D \times E = \{(x,y) \mid x \in D, y \in E\}$
$(x,y) \leq_\times (x',y')$ si ($x \leq x'$ et $y \preceq y'$).
Vérifier que $(D \times E, \leq_\times)$ est un *produit* de $(D, \leq)$ et $(E, \preceq)$ dans **CPO**.
A voir: $(D \times E, \leq_\times)$ est un cpo et il existe deux fonctions continues $\pi_1 : D \times E \to D$, $\pi_2 : D \times E \to E$, tels que pour tout cpo A, $f : A \to D$, $g : A \to E$ il existe une unique fonction continue, noté $< f,g >$, telle que $f = \pi_1 \circ < f,g >$ et $g = \pi_2 \circ < f,g >$.
Sous forme de diagramme:



Remarque: si $f : A \to C$, $g : B \to D$, on définit $f \times g : A \times B \to C \times D$ par $f \times g =< f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 >$.

Exercice 5 Soient $(D, \leq)$, $(E, \preceq)$ cpo.

On définit $(D \Rightarrow E, \leq_{\Rightarrow})$ par:

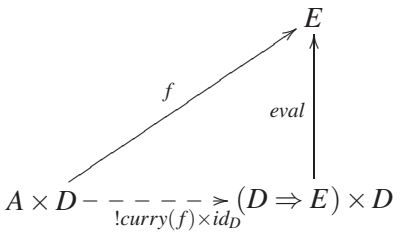
$D \Rightarrow E$ est l'ensemble des fonctions continues de D dans E.

$f \leq_{\Rightarrow} g$ si pour tout $x \in D$ $f(x) \preceq g(x)$.

Montrer que $(D \Rightarrow E, \leq_{\Rightarrow})$ est un *espace fonctionnel* de D vers E.

A voir: $(D \Rightarrow E, \leq_{\Rightarrow})$ est un cpo, et il existe une fonction continue $eval : (D \Rightarrow E) \times D \to E$ telle que, pour tout A et pour toute fonction continue $f : A \times D \to E$ il existe une unique fonction continue $curry(f) : A \to (D \Rightarrow E)$ telle que $f = eval \circ (curry(f) \times id_D)$.

Sous forme de diagramme:



Conclure que **CPO** est une catégorie cartesienne close.

Exercice 6 Montrer que **CPO** est une ccc enrichie de cpo. A voir: continuité de $\circ$, monotonicité de $< _,_ >$ et de *curry*, *strictness* à gauche de $\circ$ et de $eval \circ < _, f >$.

Exercice 7 On considère la sous-catégorie pleine de **CPO** dont les objets sont les domaines de Scott. Soient $(D, \leq)$, $(E, \preceq)$ domaines de Scott. Vérifier que $(D \times E, \leq_{\times})$ et $(D \Rightarrow E, \leq_{\Rightarrow})$ sont des domaines de Scott. Conclure que la catégorie **Cont** des domaines de Scott et fonctions continues est une ccc enrichie de cpo.