Plan:

- Fonctions séquentielles et fonctions fortement stables.
- Un modèle fortement stables: les dI-domaines avec cohérence.
- Deux ccc de structures bi-ordonnées: les bi-domaines et les plongements extensionnel.
- Définissabilité: un contre-exemple (de P.-L. Curien) et un théorème (de R. Loader).

Séquentialité au premier ordre

Soient $D_1, \ldots, D_n, D$ domaines plats, $f : D_1 \times \ldots \times D_n \to D$ monotone.

définition: f est M(ilner)-séquentielle si elle est constante,

ou bien si

$\exists\ 1 \leq i \leq n$ tel que

- f est i-stricte:
  $\forall d_1, ..., d_{i-1}, d_{i+1}, ..., d_n\ f(d_1, ..., d_{i-1}, \perp, d_{i+1}, ..., d_n) = \perp$
- si on fixe le i-éme argument, on obtient une fonction a $n-1$ arguments qui reste M-sequentielle:
  pour tout $d \in D_i$, la fonction
  $d_1, ..., d_{i-1}, d_{i+1}, ..., d_n \mapsto f(d_1, ..., d_{i-1}, d, d_{i+1}, ..., d_n)$
  est M-séquentielle.

faits:

- Les constantes du premier ordre de PCF sont M-séquentielles.
- La fonction de Berry-Kleene n'est pas M-séquentielle.

proposition:

Les fonctions du premier ordre PCF-définissables sont exactement les fonctions M-séquentielles.

Séquentialité aux ordres supérieurs

La notion de M-séquentialité se base sur la notions de “place” dans un produit cartesien. Elle ne donne pas une notion adéquate de “fonctionnelle séquentielle”.

exemple: $F : (\mathrm{B}{\rightarrow}\mathrm{B}){\rightarrow}\mathrm{B}$

$$F(g) = \begin{cases} tt & \text{si } g(tt) = tt \text{ ou } g(ff) = tt \\ ff & \text{si } g(tt) = ff \text{ et } g(ff) = ff \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

remarque: $F(g) = por(g(tt), g(ff))$.

La fonction F a un seul argument; elle est *a fortiori* M-séquentielle. Pourtant, intuitivement, F n’est pas séquentielle et en effet:

fait: F n’est pas PCF-définissable.

La stabilité forte (1)

La sequéntialité au premier ordre peut être caractérisée par des propriétés de préservation, comme le sont la monotonicité (préservation de l'ordre) et la stabilité (preservation des $\wedge$ bornés). Les fonctions séquentielles presérvent les sous-ensembles *cohérents* de leur domaine de définition. La notion de cohérence se définit comme suit sur les produits de domaines plats:

Soient $D_1 \ldots, D_n$ domaines plats.

définition:

- $a \subseteq D_i$ est *cohérent* si $\perp \in a$ ou a est un singleton.
- $a \subseteq D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ est *cohérent* si, pour tout $1 \leq i \leq n$ $\pi_i(a) \subseteq D_i$ est cohérent.

exemples:

1. L'ensemble des éléments minimaux de la fonction de Berry-Kleene est cohérent.
2. L'ensemble des éléments minimaux du `if then else` n'est pas cohérent.

La stabilité forte (2)

définition:

Soient $D_1, \ldots, D_n, D$ domaines plats, $f : D_1 \times \ldots \times D_n \rightarrow D$ est *fortement stable* si, pour tout $A \subseteq \mathrm{B}^n$ cohérent:
$f(A)$ $(= \{f(a) \mid a \in A\})$ est cohérent.
$f(\bigwedge A) = \bigwedge f(A)$.

faits:

- fortement stable $\Rightarrow$ monotone
- fortement stable $\Rightarrow$ stable

proposition: f est fortement stable ssi f est M-séquentielle.

Pour passer aux ordres supérieurs, il faut géneraliser la notion de cohérence à des domaines quelquonque.

Remarque: la généralisation “à l’identique” de la cohérence aux types superieures n’a pas d’intérêt (la fonction $g \mapsto por(g(tt), g(ff))$ serait fortement stable).

Quels sont les “bons axiomes” pour la notion de cohérence?

faits:

- Les singletons sont cohérent.
- Les ensembles cohérents ne sont pas clos par sous-ensembles, mais ils sont clos par minorants $\sqsubseteq_{EM}$, où $a \sqsubseteq_{EM} b$ si $(\forall x \in a\ \exists y \in B\ x \leq y)$ et $(\forall y \in b\ \exists x \in A\ x \leq y)$.

Plan:

- Fonctions séquentielles et fonctions fortement stables.
- Un modèle fortement stables: les dI-domaines avec cohérence.
- Deux ccc de structures bi-ordonnées: les bi-domaines et les plongements extensionnel.
- Définissabilité: un contre-exemple (de P.-L. Curien) et un théorème (de R. Loader).

dI-domaines avec cohérence

définition: Un *dI-domaine avec cohérence* (diC) est un couple $(D, \mathcal{C}(D))$ où
D est un dI-domaine.
$\mathcal{C}(D) \subseteq \mathcal{P}_{fin}(D)$ est tel que:

- pour tout $x \in D$, $\{x\} \in \mathcal{C}(D)$ (les singletons sont cohérents).
- si $A \in \mathcal{C}(D)$ et $B \sqsubseteq_{EM} A$ alors $B \in \mathcal{C}(D)$ (clôture par minorants EM).
- si $\Delta_1, ..., \Delta_n \subseteq D$ sont dirigés, et $\forall x_1 \in \Delta_1, ..., x_n \in \Delta_n$ $\{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{C}(D)$, alors $\{\bigvee \Delta_1, ..., \bigvee \Delta_n\} \in \mathcal{C}(D)$ (clôture par sup dirigés).

Fonctions fortement stables

définition: Soient $(D, \mathcal{C}(\mathcal{D}))$, $(E, \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ dIC. $f : D \rightarrow E$ est *fortement stable* si f est (Scott-)continue et, pour tout $A \in \mathcal{C}(D)$:

- $f(A) \in \mathcal{C}(E)$
- $f(\bigwedge A) = \bigwedge f(A)$.

faits:

- toute fonction fortement stable est stable.
- le fonctions fortement stables composent.
- la catégorie **Fs** des dIC et fonctions fortement stables est cartesienne.

Les espaces de fonctions:

l'objet E^D dans **Fs** doit être d'abord un dI-domaine. On choisit l'ensemble des fonctions fortement stables de $(D, \mathcal{C}(D))$ dans $(E, \mathcal{C}(E))$, **ordonné par l'ordre stable.** (ce choix est forcé: avec l'ordre extensionnel, on sait que *eval* n'est pas stable, donc elle n'est pas fortement stable).

Comment définir la cohérence sur l'ensemble des fonction fortement stables de $(D, \mathcal{C}(D))$ dans $(E, \mathcal{C}(E))$?

Une approche possible est de définir la cohérence de E^D comme le plus petit ensemble qui rend *eval* fortement stables....

définition: $(D, \mathcal{C}(\mathcal{D}))$, $(E, \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ dIC.
$E^D = ((\{f : D \rightarrow E \mid f \text{ fortement stable}\}, \leq_s), \mathcal{C}(E^D))$ où
$F \in \mathcal{C}(E^D)$ si pour tout $A \in \mathcal{C}(D)$ et pour tout $C \subseteq F \times A$ tel que $\pi_1(C) = F$ et $\pi_2(C) = A$ on a:

- $\{f(x) \mid (f, x) \in C\} \in \mathcal{C}(E)$.
- $(\bigwedge F)(\bigwedge A) = \bigwedge \{f(x) \mid (f, x) \in C\}$

fait: $eval : E^D \times D \rightarrow E$, définie par $eval(f, x) = f(x)$, est fortement stable.

proposition: **Fs** est une catégorie cartesienne fermée enrichie de cpo.

On note $\{\mathcal{F}^\sigma\}$ la structure applicative issue de **Fs** (la cohérence aux types de bases étant: A est cohérent ssi il contient $\perp$ ou c'est un singleton).

Tous les éléments de $\{\mathcal{F}^\sigma\}$ au premier ordre sont définissables.

Même aux types dupérieurs, les fonctionnelles fortement stables sont “séquentielles”.

exemple: La fonctionnelle $F(f) = por(f(tt), f(ff))$ n'est pas fortement stable.

Certaines fonctionnelles stables non définissables comme le "gouteur de ou" restent dans le modèle.

Deux résultats de définissabilité relative pour les fonctions fortement stables:

théorème: (Ehrhard 1994) tout élément de $\{\mathcal{F}^\sigma\}$ est définissable si on ajoute a PCF toute les fonctions fortement stable d'ordre 2.

théorème: (Longley 1998) il existe une fonctionnelle H, d'ordre 3, telle que tout élément de $\{\mathcal{F}^\sigma\}$ est définissable dans PCF + H.

Plan:

- Fonctions séquentielles et fonctions fortement stables.
- Un modèle fortement stables: les dI-domaines avec cohérence.
- Deux ccc de structures bi-ordonnées: les bi-domaines et les plongements extensionnel.
- Définissabilité: un contre-exemple (de P.-L. Curien) et un théorème (de R. Loader).

Structures bi-ordonnées

Idée: l'ordre extensionnel et l'ordre stable coexistent.

1ère approche: les *bi-domaines*

Objets: $(D, \leq, \sqsubseteq)$, tel que

- $(D, \leq)$ est un domaine de Scott.
- $(D, \sqsubseteq)$ est un dI-domaine (avec cohérence).
- avec des axiomes supplemenataires qui corrèlent les deux ordres (par exemple : même $\perp$).

Morphismes: $f : D \rightarrow E$ tel que

- f est Scott continue pour $\leq_D$, $\leq_E$.
- f est (fortement) stable pour $\leq_D$, $\leq_E$.

exemple: $(\mathrm{O} \rightarrow \mathrm{O}, \leq_e, \leq_s)$.

Bi-domaines

théorème la catégorie des bidomaines est une ccc enrichie de CPO.

Dans le modèle de PCF conrrespondant, des éléments non définissables du modèle stable, comme le “gouteur de strictness”, sont éliminés. D’autres, comme le “gouteur de ou”, ne le sont pas.

Structures bi-ordonnées: 2ème approches

La catégorie des *plongements extensionnel*:

Objets:

$$\begin{tikzcd} (D, \leq) \\ (S, \sqsubseteq) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

tel que

- $(D, \leq)$ est un domaine de Scott.
- $(S, \sqsubseteq)$ est un dI-domaine (avec cohérence).
- i est un injection continue (avec 1 axiome supplementaire).

Morphismes: $f : S \to T$ tel que

$$\begin{tikzcd} (D, \leq_D) & (E, \leq_E) \\ (S, \sqsubseteq_S) \arrow[u, hook, "i"'] \arrow[r, "f"'] & (T, \sqsubseteq_T) \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

- f est (fortement) stable.
- pour tout $x, y \in S$, $i(x) \leq_D i(y) \Rightarrow j(f(x)) \leq_E j(f(y))$
- pour tout $A \subseteq S$, $i(A) \uparrow_D \ \Rightarrow j(f(A)) \uparrow_E$.

Ce sont les *fonctions (fortement) stables extensionnelles*.

proposition: Il existe une unique fonction continue $\overline{f}$ telle que:

$$\begin{array}{ccc} (D, \leq_D) & \xrightarrow{\overline{f}} & (E, \leq_E) \\ \uparrow i & & \uparrow j \\ (S, \sqsubseteq_S) & \xrightarrow[f]{} & (T, \sqsubseteq_T) \end{array}$$

théorème: la catégorie des plongements extensionnels est une ccc enrichie de cpo.

Dans le modèle de PCF correspondent, le “gouteur de ou” est éliminé, et:

proposition: Le collapse extensionnel entre le modèle de Scott et celui des plongements extensionnels est surjectif.

corollaire: La théorie du modèle de Scott est (strictement) incluse dans celle des plongements extensionnels.

Plan:

- Fonctions séquentielles et fonctions fortement stables.
- Un modèle fortement stables: les dI-domaines avec cohérence.
- Deux ccc de structures bi-ordonnées: les bi-domaines et les plongements extensionnel.
- Définissabilité: un contre-exemple (de P.-L. Curien) et un théorème (de R. Loader).

Une fonctionnelle non PCF-définissable qui est dans tous les modèle qu'on a vu (elle va être éliminée dans certains modèles de jeux).

$F : (\mathrm{B}{\rightarrow}\mathrm{B}{\rightarrow}\mathrm{B}){\rightarrow}\mathrm{B}$

le points minimaux de F, à valeur tt, sont f_1, f_2, f_3, caractérisés par

$f_1 \;\; \perp \;\; \mathit{ff} = tt \quad f_1 \;\; \mathit{ff} \;\; tt = tt$

$f_2 \; tt \;\; \perp = tt$

$f_3 \;\; \perp \;\; tt = tt$

Pierre-Louis Curien a montré que si l'interprétation d'un terme se comporte comme F sur f_1, f_2, f_3, alors il s'agit de la fonctionnelle constante tt.

PCF finitaire

PCF finitaire, noté PCF_f, est le langage qui a *bool* comme unique type de base, $\Omega_{\texttt{bool}}$, **`true`**, **`false`** et **`if_then_else`** comme constantes.

fait: Un modèle (standard et extensionnels) $\{M^\sigma\}$ de PCF_f est tel que, pour tout σ, M^σ est un ensemble fini.

proposition: Si il existe un modèle (standard et extensionnels) de PCF_f dont tous les éléments sont définissables, alors l'équivalence observationnelle de PCF_f est décidable.

théorème: (Loader) L'équivalence observationnelle de PCF_f est inécidable.