Plan:

- Fonctions stables et ordre stable
- Deux ccc enrichies de cpo: $\wedge$-cpo et dI-domaines.
- Le modèle stable:
  - Une preuve alternative de la non définissabilité de *por*: le collapse extensionnel.
  - La fonction de Berry-Kleene.
  - Fonctionnelles stables non définissables.
  - Adéquation complète pour StPCF.
- Les espaces de cohérence. (TD)

Vers des modèles séquentiels

Nous avons vu:

- $por \in C^{\texttt{bool}\to\texttt{bool}\to\texttt{bool}}$
- *por* n'est pas (PCF-)définissable.
- deux termes ("gouteurs de *por*") qui sont observationnellement équivalents mais dont les interprétations dans $C^{(\texttt{bool}\to\texttt{bool}\to\texttt{bool})\to\texttt{bool}}$ sont distinctes.
- Pour éliminer l'exemple des "gouteurs de *por*", il faut que le ou parallèle ne soit pas un élément du modèle.

Peut-on caractériser le parallélisme de *por* en termes d'ordre (du domaine $\mathrm{B}_\perp$)?

Fonctions stables

définition: Un $\wedge$-cpo est un cpo D où:

- toute paire d'éléments bornés a un $\wedge$.
- pour $x \in D$, $\Delta \subseteq D$ dirigé, tels que x et $\bigvee \Delta$ sont bornés, on a $x \wedge (\bigvee \Delta) = \bigvee_{y \in \Delta} (x \wedge y)$.

Soient D, E $\wedge$-cpo, $f : D \to E$ continue.

définition: f est stable si pour tout $x, y \in D$,
$x \uparrow y \Rightarrow f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

fait: $por : \mathrm{B} \times \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ n'est pas stable.

Fonctions stables ordonnées point par point:

Soit $\mathrm{O} = \{\bot, \top\}$, $\bot < \top$.

L'ensemble de fonctions stables de O dans O ordonné point par point est

$\mathrm{O} \Rightarrow \mathrm{O} = \{x \mapsto \bot \leq x \mapsto x \leq x \mapsto \top\}$.

proposition: la fonction $eval : (\mathrm{O} \Rightarrow \mathrm{O}) \times \mathrm{O} \rightarrow \mathrm{O}$, définie par $eval(f, x) = f(x)$ n'est pas stable.

L'ordre stable (1)

$eval : (D \Rightarrow E) \times D \rightarrow E$ est stable ssi pour tout $(f, y) \uparrow (g, x)$, $(f \wedge g)(x \wedge y) = f(y) \wedge g(x)$.

En particulier, si $f \leq g$ et $x \leq y$, on a

$f(x) = f(y) \wedge g(x)$

Donc, s'il existe un ordre sur $(D \Rightarrow E)$ qui rend $eval$ stable, cet ordre vérifie:

$f \leq g \Rightarrow (\forall x \leq y \in D \ f(x) = f(y) \wedge g(x))$

définition: ordre stable

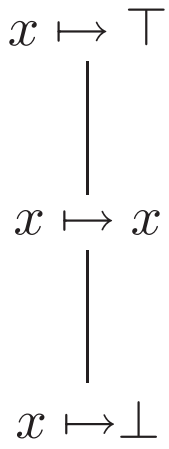
Soient D, E $\wedge$-cpo, $f, g : D \rightarrow E$ stables;

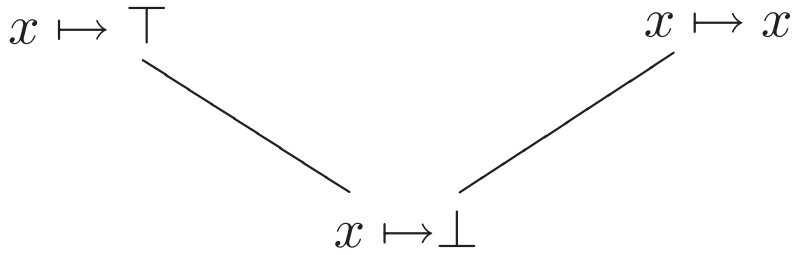
$f \leq_s g$ si pour tout $x \leq y \in D$, $f(x) = f(y) \wedge g(x)$.

fait: $\leq_s$ est une relation d'ordre, et $\leq_s \subseteq \leq$.

L'ordre stable (2)

$(\mathrm{O} \Rightarrow \mathrm{O}, \leq)$ $(\mathrm{O} \Rightarrow \mathrm{O}, \leq_s)$





fait: Soit $\mathrm{O} \Rightarrow {}_s\mathrm{O} = (\mathrm{O} \Rightarrow \mathrm{O}, \leq_s)$; $eval : (\mathrm{O} \Rightarrow {}_s\mathrm{O}) \times \mathrm{O} \to \mathrm{O}$ est stable.

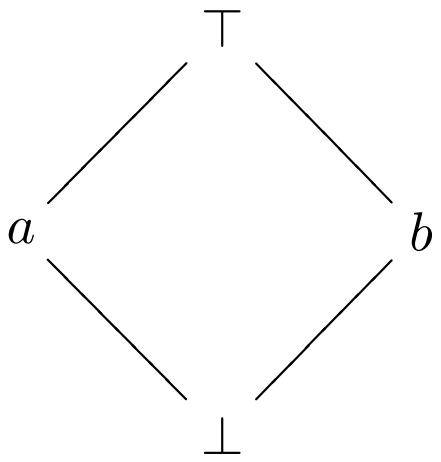
L'ordre stable (3): sup et inf stables

$f_1, f_2 : D \to \mathrm{O}$

$f_1(\bot) = f_1(b) = \bot,\ f_2(\bot) = f_2(a) = \bot$

$f_1(\top) = f_1(a) = \top,\ f_2(\top) = f_2(b) = \top$

$D =$



exercice: trouver $f_1 \wedge f_2$ et $f_1 \wedge_s f_2$,
puis $f_1 \vee f_2$ et $f_1 \vee_s f_2$.

Plan:

- Fonctions stables et ordre stable
- Deux ccc enrichies de cpo: $\wedge$-cpo et dI-domaines.
- Le modèle stable:
  - Une preuve alternative de la non définissabilité de *por*: le collapse extensionnel.
  - La fonction de Berry-Kleene.
  - Fonctionnelles stables non définissables.
  - Adéquation complète pour StPCF.
- Les espaces de cohérence. (TD)

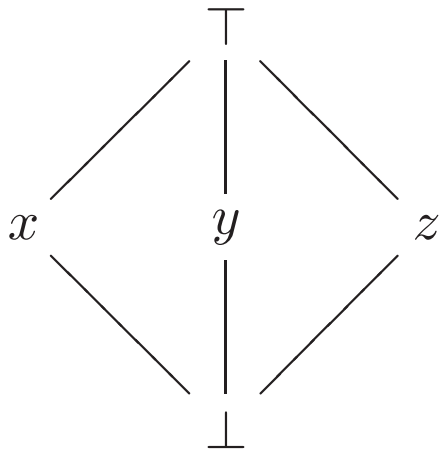
Une ccc stable

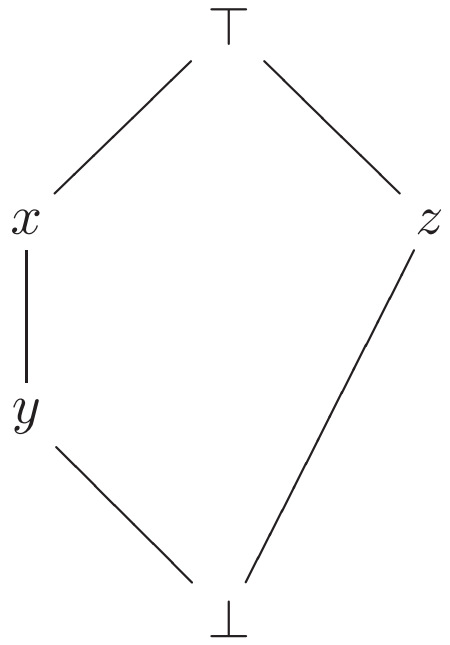
proposition: la categorie des $\wedge$-cpo et fonctions stable est une ccc enrichie de cpo.

Une ccc de domaines algébriques et morphismes stables (1)

définition: un domaine de Scott D est distributif si, pour tous $x, y, z \in D$ tels que $y \uparrow z$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Deux contrexemples minimaux::

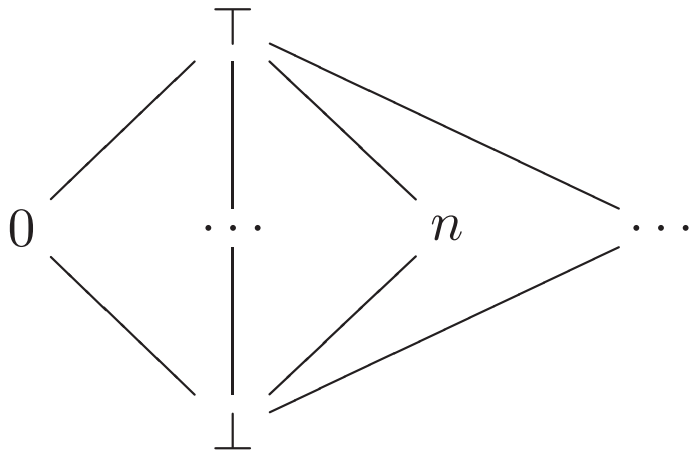




Une ccc de domaines algébriques et morphismes stables (2)

définition: un domaine de Scott D est un I-domaine si, pour tous $a \in K(D)$, l'ensemble des minorants de a, noté $\downarrow a$, est fini.

Deux contrexemples:



Une ccc de domaines algébriques et morphismes stables (3)

définition: un domaine de Scott D est un dI-domaine s'il est un I-domaine distributif.

définition: soit **Stab** la catégorie dont les objets sont les dI-domaines et les morphismes les fonctions stables.

théorème: **Stab** est une ccc enrichie de cpo.

Plan:

- Fonctions stables et ordre stable
- Deux ccc enrichies de cpo: $\wedge$-cpo et dI-domaines.
- Le modèle stable:
  - Une preuve alternative de la non définissabilité de *por*: le collapse extensionnel.
  - La fonction de Berry-Kleene.
  - Fonctionnelles stables non définissables.
  - Adéquation complète pour StPCF.
- Les espaces de cohérence. (TD)

Modèle stable et collapse extensionnel

On note $\{S^\sigma\}$ la structure applicative issue de la catégorie **Stab**, i.e. $S^\sigma = \mathbf{Stab}(\mathbf{1}, [\![\sigma]\!]^{\mathbf{Stab}})$

Il existe une relation logique binaire canonique entre les structures applicatives $\{C^\sigma\}$ et $\{S^\sigma\}$.

définition: le collapse extensionnel $\{\mathcal{E}^\sigma\}$ est la famille de relations binaires $\mathcal{E}^\sigma \subseteq C^\sigma \times S^\sigma$ définie par $\mathcal{E}^{\mathtt{bool}} = id_{\mathrm{B}}$, $\mathcal{E}^{\mathtt{nat}} = id_{\mathrm{N}}$.

proposition: $\{\mathcal{E}^\sigma\}$ est une relation logique.

Une preuve alternative de la non définissabilité de por:

Si $[\![M]\!]^C = por$,

alors (lemme fondamentale)

$(por, [\![M]\!]^S) \in \mathcal{E}^{\texttt{bool}\to\texttt{bool}\to\texttt{bool}}$.

Donc (définition de $\mathcal{E}$):

$(\ por(\bot), \ [\![M]\!]^S(\bot) \ ) \in \mathcal{E}^{\texttt{bool}\to\texttt{bool}}$
$(\ por(tt), \ [\![M]\!]^S(tt) \ ) \in \mathcal{E}^{\texttt{bool}\to\texttt{bool}}$

Au type $\texttt{bool}\to\texttt{bool}$, $\mathcal{E}$ est l'identité (vérifier), on a donc:

$[\![M]\!]^S(\bot) = [tt => tt]$
$[\![M]\!]^S(tt) = [\bot => tt]$.

Mais

$\bot \leq_s tt$ et $[tt => tt] \not\leq_s [\bot => tt]$.

$[\![M]\!]^S$ n'est pas monotone. Contradiction.

Plan:

- Fonctions stables et ordre stable
- Deux ccc enrichies de cpo: $\wedge$-cpo et dI-domaines.
- Le modèle stable:
  - Une preuve alternative de la non définissabilité de *por*: le collapse extensionnel.
  - La fonction de Berry-Kleene.
  - Fonctionnelles stables non définissables.
  - Adéquation complète pour StPCF.
- Les espaces de cohérence. (TD)

La fonction de Berry-Kleene (1)

Une fonction d'ordre 1, stable et non définissable:

$G \in \mathcal{S}^{\mathtt{bool}\to\mathtt{bool}\to\mathtt{bool}\to\mathtt{bool}}$ définie par

$$\begin{array}{llll} G & tt & \mathit{ff} & \bot & = tt \\ G & \mathit{ff} & \bot & tt & = tt \\ G & \bot & tt & \mathit{ff} & = tt \end{array}$$

fait La fonction G est stable. Il existe une fonction (continue) g telle que $(g, G) \in \mathcal{E}^{\mathtt{bool}\to\mathtt{bool}\to\mathtt{bool}\to\mathtt{bool}}$.

Donc le collapse extensionnel ne peut pas être utilisé pour prouver la non définissabilité de G.

La fonction de Berry-Kleene (2)

On considère la relation logique $\mathcal{T}^\sigma \subseteq S^\sigma \times S^\sigma \times S^\sigma \times S^\sigma$ définie par $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathcal{T}^\kappa$ si $c_1 = \bot$ ou $c_2 = \bot$ ou $c_3 = \bot$ ou $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ (pour κ type de base).

proposition

- $\mathcal{T}$ est une relation logique.
- G n'est pas invariante pour $\mathcal{T}$ (i.e. $(G, G, G, G) \notin \mathcal{T}^{\texttt{bool}\to\texttt{bool}\to\texttt{bool}\to\texttt{bool}}$).

corollaire G n'est pas définissable.

Plan:

- Fonctions stables et ordre stable
- Deux ccc enrichies de cpo: $\wedge$-cpo et dI-domaines.
- Le modèle stable:
  - Une preuve alternative de la non définissabilité de *por*: le collapse extensionnel.
  - La fonction de Berry-Kleene.
  - Fonctionnelles stables non définissables.
  - Adéquation complète pour StPCF.
- Les espaces de cohérence. (TD)

Définissabilité aux ordres supérieurs

Deux exemples de fonctionnelles stables non définissables:

- Le *strictness-tester* $\in S^{(\texttt{bool}\to\texttt{bool})\to\texttt{bool}}$.
- Le *or-tester* $\in S^{(\texttt{bool}\to\texttt{bool}\to\texttt{bool})\to\texttt{bool}}$.

Dans le deux cas, la preuve de non-définissabilité peut se faire en utilisant soit le collapse extensionnel, soit des relations logiques ad hoc.

Le strictness-tester (1)

- $[tt => tt]^S \vee [ff => tt]^S =$
  $[\![\lambda \mathtt{x} : \mathtt{bool.if\ x\ then\ true\ else\ true}]\!]^S \not\leq_s [\![\lambda \mathtt{x} : \mathtt{bool.true}]\!]^S =$
  $[\bot => tt]^S$
- Soit st la fonction définie par les points minimaux:
  $st([tt => tt] \vee [ff => tt]) = tt$, $st([\bot => tt]) = ff$.
- $st \in \mathcal{S}^{(\mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}}$.
- $[tt => tt]^C \vee [ff => tt]^C =$
  $[\![\lambda \mathtt{x} : \mathtt{bool.if\ x\ then\ true\ else\ true}]\!]^C \leq [\![\lambda \mathtt{x} : \mathtt{bool.true}]\!]^C =$
  $[\bot => tt]^C$
- $\nexists f\ (f, st) \in \mathcal{E}^{(\mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}}$.
- st n'est pas d'efinissable.

Le strictness-tester (2)

Deux termes qui "goutent" le strictness-tester:

soient:

M $=\lambda x$:bool. if x then true else true

N $=\lambda x$:bool. true

P/Q= λf : (bool$\rightarrow$ bool) $\rightarrow$ bool.

if f M then

if f N then Ω

else true/false

else Ω

proposition:

- $[\![P]\!]^S \neq [\![Q]\!]^S$
- $[\![P]\!]^C = [\![Q]\!]^C$, $P \equiv_{obs} Q$

Le or-tester (1)

- $ou_gauche^S = [\![\lambda \mathtt{x}, \mathtt{y} : \mathtt{bool.if\ x\ then\ true\ else\ y}]\!]^S \not\uparrow_S [\![\lambda \mathtt{x}, \mathtt{y} : \mathtt{bool.if\ y\ then\ true\ else\ x}]\!]^S = ou_droit^S$
- Soit ou_t la fonction définie par les points minimaux: $ou_t(ou_gauche^S) = tt$, $ou_t(ou_droit^S) = ff$.
- $ou_t \in S^{(\mathtt{bool} \to \mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}}$.
- $ou_gauche^C = [\![\lambda \mathtt{x}, \mathtt{y} : \mathtt{bool.if\ x\ then\ true\ else\ y}]\!]^C \uparrow_C [\![\lambda \mathtt{x}, \mathtt{y} : \mathtt{bool.if\ y\ then\ true\ else\ x}]\!]^C = ou_droit^C$
- $\not\exists f\ (f, ou_t) \in \mathcal{E}^{(\mathtt{bool} \to \mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}}$
- ou_t n'est pas d'efinissable.

Le or-tester (2)

Deux termes qui "goutent" le or-tester:

soient:

$\mathtt{G} = \lambda x{:}\mathtt{bool}.\quad \lambda y{:}\mathtt{bool}\ \mathtt{if}\ x\ \mathtt{then\ true\ else}\ y$

$\mathtt{D} = \lambda x{:}\mathtt{bool}.\quad \lambda y{:}\mathtt{bool}\ \mathtt{if}\ y\ \mathtt{then\ true\ else}\ x$

$P/Q = \lambda f : (\mathtt{bool} \to \mathtt{bool} \to \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}.$

$\mathtt{if}\ f\ \mathtt{G}\ \mathtt{then}$

$\mathtt{if}\ f\ \mathtt{D}\ \mathtt{then}\ \Omega$

$\mathtt{else\ true/false}$

$\mathtt{else}\ \Omega$

proposition:

- $[\![P]\!]^S \neq [\![Q]\!]^S$
- $[\![P]\!]^C = [\![Q]\!]^C$, $P \equiv_{obs} Q$

Plan:

- Fonctions stables et ordre stable
- Deux ccc enrichies de cpo: $\wedge$-cpo et dI-domaines.
- Le modèle stable:
  - Une preuve alternative de la non définissabilité de *por*: le collapse extensionnel.
  - La fonction de Berry-Kleene.
  - Fonctionnelles stables non définissables.
  - Adéquation complète pour StPCF.
- Les espaces de cohérence. (TD)

PCF stable

Soit StPCF le langage obenu en rajoutant à PCF:

$\vdash$ g : bool$\to$bool$\to$bool$\to$bool

g true false M $\to_{op}$ true

g false N true $\to_{op}$ true

g M true false $\to_{op}$ false

$\vdash$ test : (int$\to$int)$\to$int

$$[\![\texttt{test}]\!]^S(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\bot) = \bot \text{ et } f(0) \neq \bot \\ 1 & \text{si } f(\bot) \neq \bot \\ \bot & \text{sinon} \end{cases}$$

théorème: tous les éléments compacts du modèle stable sont définissables en StPCF.

corollaire: le modèle stable est complétement adéquat pour StPCF.

Plan:

- Fonctions stables et ordre stable
- Deux ccc enrichies de cpo: $\wedge$-cpo et dI-domaines.
- Le modèle stable:
  - Une preuve alternative de la non définissabilité de *por*: le collapse extensionnel.
  - La fonction de Berry-Kleene.
  - Fonctionnelles stables non définissables.
  - Adéquation complète pour StPCF.
- Les espaces de cohérence. (TD)