Plan de la 1ère séance:

- Le langage PCF
  - Syntaxe
  - Sémantique opérationnelle.
  - Equivalence observationnelle, lemme du contexte.
- Modèles de PCF
  - Qu'est-ce qu'un modèle de PCF.
  - Adéquation.
  - Le modèle de Scott (TD)

Plan:

- Modèles extensionnels et structures applicatives
- Relations logiques
- Le modèle de Scott
- PCF parallèle
- Problèmes de définissabilité (TD)

Plan:

- Modèles extensionnels et structures applicatives
- Relations logiques
- Le modèle de Scott
- PCF parallèle
- Problèmes de définissabilité (TD)

Modèles extensionnels

définition

- Une catégorie $\mathcal{C}$ avec objet terminale $\mathbf{1}$ a *enough points* si, pour toute paire de morphismes $f, g : A \to B$ tels que pour tout $p : \mathbf{1} \to A$ $f \circ p = g \circ p$ on a $f = g$.
- Un modèle de PCF $(\mathcal{C}, [\![\ ]\!])$ est *extensionnel* si $\mathcal{C}$ a enough points.

Le modèle de cpo et fonctions continue est extensionnel, ainsi que les autres modèles issus des domaines.

Les modèles extensionnel se prêtent à une présentation simple:

Structures Applicatives

Une structure applicative est une famille $\{D^\sigma\}$ d'ensembles indexés par les types de PCF, telle que $D^{\sigma \to \tau}$ est un ensemble de fonctions de D^σ vers D^τ.

L'interprétation de $x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash M : \tau$ dans une structure applicative est une fonction de $D^{\sigma_1} \times \ldots \times D^{\sigma_n}$ vers D^τ (le produit étant celui de Set). En particulier, l'interprétation de $\vdash M : \tau$ est un élément de D^τ.

définition

Soit $(\mathcal{C}, [\![\ ]\!])$ un modèle extensionnel. On défini la structure applicative correspondante $\{C^\sigma\}$ come suit:

- $C^\sigma = \mathcal{C}(\mathbf{1}, [\![\sigma]\!])$
- Pour $f \in C^{\sigma \to \tau}$, $a \in C^\sigma$, $f(a) = eval \circ < f, a >$
- $[\![x_1 : \sigma_1, .., x_n : \sigma_n \vdash M : \tau]\!]^C(d_1, \ldots, d_n) = [\![x_1 : \sigma_1, .., x_n : \sigma_n \vdash M : \tau]\!] \circ < d_1, \ldots, d_n >$

l'interprétation des termes simplement typés dans une structure applicative est donc:

$[\![x_1 : \alpha_1, ..., x_n : \alpha_n \vdash x_i : \alpha_i]\!](d_1, \ldots, d_n) = d_i$

$[\![\Gamma \vdash MN : \alpha]\!]\vec{d} = ([\![\Gamma \vdash M : \beta \to \alpha]\!]\vec{d})([\![\Gamma \vdash N : \beta]\!]\vec{d})$

$([\![\Gamma \vdash \lambda x : \alpha.M : \alpha \to \beta]\!]\vec{d})(e) = [\![\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta]\!](\vec{d}, e)$

Si $(\mathcal{C}, [\![\ ]\!])$ est un modèle standard, on note $\{\mathcal{C}^\sigma\}$ la structure applicative correspondante.

La structure applicative issue d'un modèle extensionnel sera appelée simplement *modèle* de PCF.

Plan:

- Modèles extensionnels et structures applicatives
- Relations logiques
- Le modèle de Scott
- PCF parallèle
- Problèmes de définissabilité (TD)

Relations Logiques

définition: Soient $\{C_1^\sigma\}$,.., $\{C_n^\sigma\}$ modèles de PCF. Une relation logique (n-aire) $\{\mathcal{R}^\sigma\}$ est une famille de relations n-aires indexées sur les types telle que:

- $\mathcal{R}^\sigma \subseteq C_1^\sigma \times \ldots \times C_n^\sigma$.
- $(f_1, ..., f_n) \in \mathcal{R}^{\sigma \to \tau}$ ssi pour tout $a_1 \in C_1^\sigma, ..., a_n \in C_n^\sigma$: $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{R}^\sigma \;\Rightarrow (f_1(a), ..., f_n(a_n)) \in \mathcal{R}^\tau$.
- Pour toute constante $c : \sigma$, $(\llbracket c \rrbracket^{C_1}, ..., \llbracket c \rrbracket^{C_n}) \in \mathcal{R}^\sigma$.

remarques:

- une relation logique $\{\mathcal{R}^\sigma\}$ est complétement définie par les deux relations $\mathcal{R}^{\mathtt{bool}}$ et $\mathcal{R}^{\mathtt{int}}$. Plus généralement, une relation logique est définie par son comportement aux types de base.
- les modèles C_i de la définition ne sont pas nécessairement differents entre eux.

Relations Logiques: un exemple

Considérons la relation ternaire $\mathcal{S}$ sur $\{Cpo^{\sigma}\}$, définie au types de bases par $(c_1, c_2, c_3) \in \mathcal{S}^{\kappa}$ si $c_1 = \perp$ ou $c_2 = \perp$ ou $c_1 = c_2 = c_3$ $(\kappa = \texttt{nat}, \texttt{bool})$.

lemma: $\mathcal{S}$ est une relation logique.

lemma: $(por, por, por) \notin \mathcal{S}^{\texttt{bool} \to \texttt{bool} \to \texttt{bool}}$

où $por \in Cpo^{\texttt{bool} \to \texttt{bool} \to \texttt{bool}}$ est la fonction définie par:

por	$\perp$	tt	ff
$\perp$	$\perp$	tt	$\perp$
tt	tt	tt	tt
ff	$\perp$	tt	ff

Relations Logiques: lemme fondamentale

lemme fondamentale des relations logiques:

Soit $\{\mathcal{R}^\sigma\}$ une relation logique n-aire.

Pour tout terme clos $\vdash M : \tau$

$(\llbracket M \rrbracket^{C_1}, ..., \llbracket M \rrbracket^{C_n}) \in \mathcal{R}^\tau$.

corollaire: *por* n'est pas PCF-définissable.

(i.e. il n'existe aucun terme clos $\vdash M$: `bool`→`bool`→`bool` de PCF tel que $\llbracket M \rrbracket^{Cpo} = por$).

Les "gouteurs" de por

On considère les terms de PCF

$T, F : (\texttt{bool}{\rightarrow}(\texttt{bool}{\rightarrow}\texttt{bool})){\rightarrow}\texttt{bool}$:

T/F= λf : bool$\rightarrow$ (bool $\rightarrow$ bool).

```
                if (f true Ω) then
                   if (f Ω true) then
                      if (f false false) then Ω
                      else true/false
                   else Ω
                else Ω
```

$\{Cpo^{\sigma}\}$ n'est pas complétement adéquat

proposition:

$[\![T]\!]^{Cpo} \neq [\![F]\!]^{Cpo}$

proposition

$T \equiv_{obs} F$

Plan:

- Modèles extensionnels et structures applicatives
- Relations logiques
- Le modèle de Scott
- PCF parallèle
- Problèmes de définissabilité (TD)

Une description fine du modèle $\{Cpo^\sigma\}$: les domaines de Scott

définition: élément compact d'un cpo

Soit $(D, \leq)$ un cpo, $x \in D$; x est compact si pour tout $\Delta \subseteq D$, dirigé, si $x \leq \bigvee \Delta$ alors il existe $z \in \Delta$ tel que $x \leq z$.

L'ensemble des éléments compacts de D est noté $K(D)$.

L'ensemble des minorants compacts d'un élt. x est noté K_x.

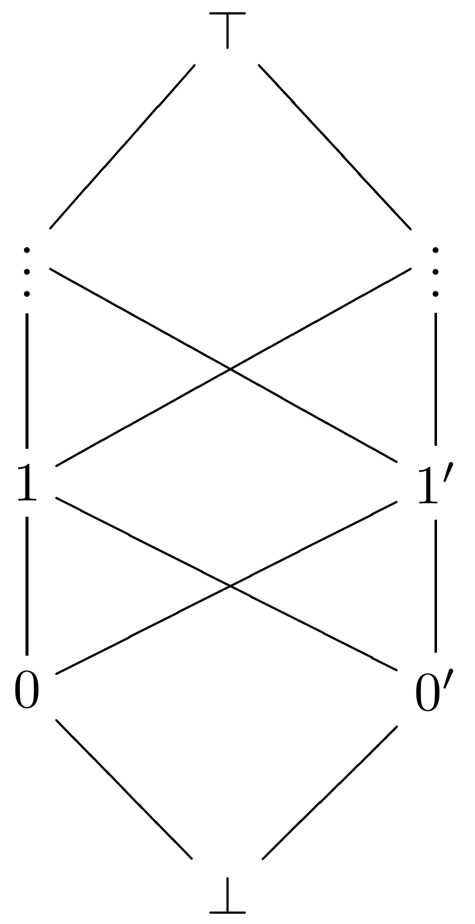
définition: cpo algébrique

Un cpo $(D, \leq)$ est algebrique si, pour tout $x \in D$:

- K_x est dirigé
- $x = \bigvee K_x$.

fait: L'algebricité n'est pas preservée par exponentiation:

contre-exemple à la préservation de l'algébricité:



1) $id_D \notin K(D \to D)$

2) $[0 \Rightarrow 0], [0' \Rightarrow 0'] \in K_{id_D}$

3)$f \geq [0 \Rightarrow 0], f \geq [0' \Rightarrow 0'],$

$f \leq id_D \Rightarrow f = id_D.$

donc K_{id_D} n'est pas dirigé.

Domaines de Scott

définition: cpo complet sous condition

Un cpo $(D, \leq)$ est complet sous condition si tout sous-ensemble majoré de D a un sup.

définition: domaine de Scott

Un domaine de Scott est un cpo algebrique et complet sous condition.

théorème:

La catégorie des domaines de Scott et fonctions continues est une ccc enrichie de cpo.

Clôture par exponentiels

proposition:

Si D et E sont des domaines de Scott, alors le cpo des fonctions continue de D dans E (ordonné point à point), noté $D {\rightarrow_c} E$ est un domaine de Scott.

lemme:

Si D et E sont complets sous condition, $D {\rightarrow_c} E$ l'est aussi.

lemme:

Si D est complet sous condition, et $a, b \in K(D)$ sont majorés, alors $a \vee b \in K(D)$.

lemme:

Soient D et E domaines de Scott, $a \in K(D)$, $b \in K(E)$, et soit $a \Rightarrow b$ définie par

$$(a \Rightarrow b)(x) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq x \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $(a \Rightarrow b) \in K(D {\rightarrow_c} E)$.

lemme:

Soient $f \in D {\rightarrow_c} E$, $M = \{a \Rightarrow b \mid b \leq f(a)\}$. On a $f = \bigvee M$.

Le modèle de Scott

On note $\{C^\sigma\}$ ("C" comme "continu" par opposition a "stable" et "fortement stable") le modèle issu de da la catégorie des domaines de Scott et fonctions continues.

Remarque: $\{C^\sigma\}$ et $\{Cpo^\sigma\}$ sont identique. En particulier, l'exemple du "parallel or" reste valable pour $\{C^\sigma\}$.

La description plus fine obtenue grâce à la notion d'élément compact permet de prouver que $\{C^\sigma\}$ est complétement adéquat pour une extension "parallèle" de PCF.

Plan:

- Modèles extensionnels et structures applicatives
- Relations logiques
- Le modèle de Scott
- PCF parallèle
- Problèmes de définissabilité (TD)

PCF parallèle

Soit $\mathrm{PCF}^{\parallel}$ le langage obenu en rajoutant à PCF la constante:

$\vdash \texttt{por} : \texttt{bool}{\rightarrow}\texttt{bool}{\rightarrow}\texttt{bool}$

et les règles:

$\texttt{por true } M \rightarrow_{op} \texttt{true}$

$\texttt{por } M \texttt{ true} \rightarrow_{op} \texttt{true}$

$\texttt{por false false} \rightarrow_{op} \texttt{false}$

théorème: tous les éléments compacts du modèle de Scott sont définissables par des termes de $\mathrm{PCF}^{\parallel}$.

corollaire: le modèle de Scott est complétement adéquat pour $\mathrm{PCF}^{\parallel}$.

Plan:

- Modèles extensionnels et structures applicatives
- Relations logiques
- Le modèle de Scott
- PCF parallèle
- Problèmes de définissabilité (TD)