Plan:

- Le langage PCF
  - Syntaxe
  - Sémantique opérationnelle.
  - Equivalence observationnelle, lemme du contexte.
- Modèles de PCF
  - Qu'est-ce qu'un modèle de PCF.
  - Adéquation.
  - Le modèle de Scott (TD)

Syntaxe de PCF (1)

Types:

$\alpha = \texttt{nat} \mid \texttt{bool} \mid \alpha \rightarrow \alpha$

Constantes:

type de base	$\texttt{n} : \texttt{nat}\ (n \in \mathrm{N})$ $\texttt{true,false} : \texttt{bool}$
premier ordre	$\texttt{succ,pred} : \texttt{nat} \rightarrow \texttt{nat}$ $\texttt{zero?} : \texttt{nat} \rightarrow \texttt{bool}$ $\texttt{if then else} : \texttt{bool} \rightarrow \texttt{nat} \rightarrow \texttt{nat} \rightarrow \texttt{nat}$ $\texttt{if then else} : \texttt{bool} \rightarrow \texttt{bool} \rightarrow \texttt{bool} \rightarrow \texttt{bool}$
ordre supérieur	$\texttt{Y}_\sigma : (\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma$, pour tout type σ $\Omega_\sigma : \sigma$, pour tout type σ

Syntaxe de PCF (2)

Termes:

$$M = \mathsf{c} \mid x \mid MM \mid \lambda x : \sigma.\, M$$

Règles de typage

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{c} : \sigma_{\mathsf{c}}}\,Const \qquad \frac{}{x_1 : \alpha_1, \ldots, x_n : \alpha_n \vdash x_i : \alpha_i}\,Var$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x : \alpha . M : \alpha \rightarrow \beta}\,Abs \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash N : \alpha}{\Gamma \vdash MN : \beta}\,Appl$$

Unicité du typage:

Si $\Gamma \vdash M : \sigma_1$ et $\Gamma \vdash M : \sigma_2$ alors $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.

Sémantique opérationnelle de PCF en appel par nom

$\texttt{zero?0} \rightarrow_{op} \texttt{true}$ $\qquad$ $\texttt{zero?(n+1)} \rightarrow_{op} \texttt{false}$

$\texttt{succ n} \rightarrow_{op} \texttt{n+1}$ $\qquad$ $\texttt{pred(n+1)} \rightarrow_{op} \texttt{n}$

$(\lambda x : \sigma.M)N \rightarrow_{op} M[N/x]$ $\qquad$ $\texttt{if true then } M \texttt{ else } N \rightarrow_{op} M$

$\texttt{Y}_\sigma M \rightarrow_{op} M(\texttt{Y}_\sigma M)$ $\qquad$ $\texttt{if false then } M \texttt{ else } N \rightarrow_{op} N$

$$\frac{M \rightarrow_{op} M'}{MN \rightarrow_{op} M'N} \qquad \frac{M \rightarrow_{op} M'}{\texttt{if } M \texttt{ then } N \texttt{ else } P \rightarrow_{op} \texttt{if } M' \texttt{ then } N \texttt{ else } P}$$

$$\frac{M \rightarrow_{op} M'}{f(M) \rightarrow_{op} f(M')} \qquad f \in \{\texttt{succ}, \texttt{pred}, \texttt{zero?}\}$$

lemme: Si $M \rightarrow_{op} M'$ et $M \rightarrow_{op} M''$, alors $M' \equiv M''$.

corollaire: $\rightarrow_{op}$ est une relation confluente.

proposition (subject reduction) Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et $M \rightarrow_{op} N$, alors $\Gamma \vdash M' : \sigma$.

définition: (preordre et équivalence observationnels)

- Un programme est un terme clos de type de base.
- Soient M, N termes du même type. M est observationnellement plus petit que N ($M \leq_{obs} N$) si: $\forall C[\;](C[M] \stackrel{*}{\rightarrow}_{op} c \Rightarrow C[N] \stackrel{*}{\rightarrow}_{op} c)$ où $C[\;]$ est un contexte tel que $C[M], C[N]$ sont des programmes et c est une constante de type de base (`n,true` ou `false`).
- $M \equiv_{obs} N$ si $M \leq_{obs} N$ et $N \leq_{obs} M$.

lemme: (lemme du contexte) Si M, N termes clos du même type sont tels que, pour tout termes clos $P_1, ..., P_k$ tels que $MP_1...P_k$ est de type de base, $MP_1...P_k \xrightarrow{*}_{op} c \Rightarrow NP_1...P_k \xrightarrow{*}_{op} c$

alors $M \leq_{obs} M$.

(i.e. "les contextes applicatifs suffisent")

Plan:

- Le langage PCF
  - Syntaxe
  - Sémantique opérationnelle.
  - Equivalence observationnelle, lemme du contexte.
- Modèles de PCF
  - Qu'est-ce qu'un modèle de PCF.
  - Adéquation.
  - Le modèle de Scott. (TD)

La notion de modèle de PCF est donnée en trois étapes, de façon incrémentale:

1. les *catégories cartesiennes closes* (ccc): modèles du λ-calcul simplement typé.

2. les ccc *enrichies de cpo*: modèles du λ-Y-calcul.

3. les *modèles standards* de PCF.

Notations

types $\xrightarrow{[\![\ ]\!]}$ objets de $\mathbf{C}$

typages dérivables $\xrightarrow{[\![\ ]\!]}$ morphismes de $\mathbf{C}$

$[\![x_1 : \alpha_1, \ldots, x_n : \alpha_n \vdash M : \beta]\!] \in \mathbf{C}(\mathbf{1} \times [\![\alpha_1]\!] \times \ldots \times [\![\alpha_n]\!], [\![\beta]\!])$

en particulier:

$[\![\vdash M : \beta]\!] \in \mathbf{C}(\mathbf{1}, [\![\beta]\!])$

Pour des termes clos, et quand le type du terme est évident ou non significatif, on peut écrire $[\![M]\!]$ au lieu de $[\![\vdash M : \beta]\!]$

Catégories Cartésiennes Closes

definition Une *catégorie cartésienne close* (ccc) $\mathcal{C}$ est une catégorie munie de:

- un *objet terminale* : il existe un objet $\mathbf{1}$ tel que pour tout objet A il existe un unique morphisme 1_A de A à $\mathbf{1}$. Sous forme de diagramme:

$$A \overset{1_A}{\dashrightarrow} \mathbf{1}$$

CCC (2)

- produits cartésiens: pour tous A, B objets de $\mathcal{C}$ il existe un objet $A \times B$ et deux morphismes $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$, $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$ tels que, pour tout objet C et morphismes $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$, il existe un unique morphisme $h : C \rightarrow A \times B$ tel que $f = \pi_1 \circ h$, $g = \pi_2 \circ h$. Le morphisme h s'écrit $< f, g >$. Sous forme de diagramme:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "<f,g>"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

CCC (3)

- Exponentielles: pour tous A, B objets de $\mathcal{C}$ il existe un objet B^A et un morphisme $ev : B^A \times A \rightarrow B$ tel que, pour tout object C et morphisme $f : C \times A \rightarrow B$ il existe un unique morphisme $h : C \rightarrow B^A$ tel que $ev \circ (h \times id_A) = f$, où $h \times id_A$ abrège $< h \circ \pi_1, id_A \circ \pi_2 >$. Le morphisme h s'écrit $\Lambda(f)$, Λ étant l'operateur de "curryfication". Sous forme de diagramme:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \\
C \times A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "\Lambda(f) \times id_A"'] & B^A \times A \arrow[u, "ev"']
\end{tikzcd}
$$

Modèles categoriels de PCF (1)

Intreprétation du λ-calcul simplement typé dans une ccc:

$[\![x_1 : \alpha_1, ..., x_n : \alpha_n \vdash x_i : \alpha_i]\!] = \pi_i^n$

où

$$\pi_i^n = \begin{cases} \pi_2 & si\ n = i \\ \pi_i^{n-1} \circ \pi_1 & sinon \end{cases}$$

$[\![\Gamma \vdash MN : \alpha]\!] = eval \circ < [\![\Gamma \vdash M : \beta \to \alpha]\!], [\![\Gamma \vdash N : \beta]\!] >$

$[\![\Gamma \vdash \lambda x : \alpha.M : \alpha \to \beta]\!] = curry([\![\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta]\!]$

Correction (soundness) de l'interprétation du λ-calcul dans une ccc

lemme

Dans une ccc, soient $f : C \times A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow A$. Alors $ev\circ < \Lambda f, g >= f\circ < id, g >$

lemme [Substitution Lemma]

Soient $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$. Alors

- $\Gamma \vdash M[N/x] : \tau$.
- $[\![\Gamma \vdash M[N/x] : \tau]\!] = [\![\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau]\!]\circ < id, [\![\Gamma \vdash N : \sigma]\!] >$

proposition $[\![\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma.M)N : \tau]\!] = [\![\Gamma \vdash M[N/x] : \tau]\!]$

CCC enrichies de cpo

définition:

Une catégorie cartesienne close $\mathbf{C}$ est enrichie de cpo si pour tout couple d'objets (A, B), $\mathbf{C}(A, B)$ est un cpo et:

- la composition $\circ : \mathbf{C}(B, C) \times \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{C}(A, C)$ est continue.
- l'opération $< \_ , \_ >$: $\mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(A, C) \to \mathbf{C}(A, B \times C)$ est monotone.
- l'opération $\Lambda : \mathbf{C}(A \times B, C) \to \mathbf{C}(A, C^B)$ est monotone.
- Pour $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $\perp_{\mathbf{C}(B,C)} \circ f = \perp_{\mathbf{C}(A,C)}$
- Pour $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $eval \circ < \perp_{\mathbf{C}(A,C^B)}, f > = \perp_{\mathbf{C}(A,C)}$

proposition: Dans une ccc enrichie de cpo, les opérations de "pairing" et "currying" sont continues.

Modèles catégoriels de PCF (2)

définition: modèle de plus petit point fixe

Un modèle de plus petit point fixe est un catégorie enrichie de cpo où:

$[\![\Omega_\sigma]\!] = \perp_{\mathbf{C}(\mathbf{1},[\![\sigma]\!])}$ et

$[\![Y_\sigma]\!] = \bigvee_{n \in \mathrm{N}} [\![\lambda f : \sigma \rightarrow \sigma . f^n \Omega_\sigma]\!]$

où $M^n P \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{M(\ldots M(}_{n\times} P)\ldots)$

proposition: Tout modèle de plus petit point fixe valide la règle $\mathtt{Y}_\sigma M \rightarrow_{op} M(\mathtt{Y}_\sigma M)$.

Modèles catégoriels de PCF (3)

définition: modèle standard Un modèle standard de PCF est un modèle de plus petit point fixe $\mathbf{C}$ tel que:

$\mathbf{C}(\mathbf{1}, [\![\mathtt{nat}]\!]) \simeq \mathrm{N}_\perp$

$\mathbf{C}(\mathbf{1}, [\![\mathtt{bool}]\!]) \simeq \mathrm{B}_\perp$

et tel que:

$\forall b \in \mathbf{C}(\mathbf{1}, [\![\mathtt{bool}]\!]),\ \forall n, m \in \mathbf{C}(\mathbf{1}, [\![\mathtt{nat}]\!])$

$$eval \circ < [\![\mathtt{succ}]\!], n >= \begin{cases} \perp & \text{si } n = \perp \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$eval \circ < [\![\mathtt{pred}]\!], n >= \begin{cases} \perp & \text{si } n = \perp \ \text{ ou } n = 1 \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

définition: modèle standard (suite)

et tel que:

$$eval\circ < [\![\texttt{zero?}]\!], n >= \begin{cases} \perp & \text{si } n = \perp \\ tt & \text{si} n = 0 \\ \mathit{ff} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$eval\circ < eval\circ < eval\circ < [\![\texttt{if then else}]\!], b >, n >, m >=$$

$$\begin{cases} \perp & \text{si } b = \perp \\ n & \text{si } b = tt \\ m & \text{si } b = \mathit{ff} \end{cases}$$

Plan:

- Le langage PCF
  - Syntaxe
  - Sémantique opérationnelle.
  - Equivalence observationnelle, lemme du contexte.
- Modèles de PCF
  - Qu'est-ce qu'un modèle de PCF.
  - Adéquation.
  - Le modèle de Scott. (TD)

Relations entre sémantique opérationnelle et dénotationnelle

proposition: soundness

Tout modèle standard valide toutes les règles de la sémantique opérationnelle de PCF.

théorème: adéquation

Soit $(\mathbf{C}, [\![\ ]\!])$ un modèle standard, et $P : \mathtt{nat}$ un programme. On a:

$P \rightarrow_{op}^{*} \mathtt{n} \Leftrightarrow [\![P]\!] = n$

(et analoguement pour $P : \mathtt{bool}$).

corollaire: adéquation pour $\leq_{obs}$

Soit $(\mathbf{C}, [\![\ ]\!])$ un modèle standard, et M, N termes clos tels que $[\![M]\!] \leq [\![N]\!]$. Alors $M \leq_{obs} N$.

(en particulier $[\![M]\!] = [\![N]\!] \Rightarrow M \equiv_{obs} N$).

Adéquation complète (full abstraction)

On dit qu'un modèle standard $(\mathbf{C}, [\![\ ]\!])$ est *complètement adéquat* si pour tous termes clos $M, N : \sigma$, on a

$$[\![M]\!] \leq [\![N]\!] \Leftrightarrow M \leq_{obs} N$$

et donc, en particulier,

$$[\![M]\!] = [\![N]\!] \Leftrightarrow M \equiv_{obs} N$$

Plan:

- Le langage PCF
  - Syntaxe
  - Sémantique opérationnelle.
  - Equivalence observationnelle, lemme du contexte.
- Modèles de PCF
  - Qu'est-ce qu'un modèle de PCF.
  - Adéquation.
  - Le modèle de Scott. (TD)