La résolution en calcul propositionnel

Résolution

Méthode par réfutation :

$$\Delta \models A \text{ ssi } A \text{ s'obtient à partir de } \Delta \text{ par résolution}$$

$$\Delta \models A \text{ ssi } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ insatisfaisable iff } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ est réfutable}$$

Forme Normale Conjonctive (DNC)

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une clause est une formule de la forme $l_1 \vee \ldots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La clause vide $(n = 0)$ s'écrit $\perp$.
- Une formule est en forme normal conjonctive ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une conjonction élémentaire est une formule de la forme $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral.La conjonction élémentaire vide $(n = 0)$ s'écrit $\top$.
- Une formule est en forme normal disjonctive ssi elle est de la forme $C_1 \vee \ldots \vee C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et $FNC_\Delta = \{E_1, \ldots, E_n\}$ où chaque E_i est une FNC de A_i. Pour chaque E_i de la forme $D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}\}$. Soit $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$. Alors Δ est satisfaisable ssi C_Δ est satisfaisable.

Formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

$$
\begin{aligned}
A \equiv\quad & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
\neg A \equiv\quad & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
A \equiv\quad & (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge \\
& (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)
\end{aligned}
$$

Règles de la résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

(D et C sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \qquad C \vee \neg p}{D \vee C}\ (coupure) \qquad \frac{p \qquad \neg p}{\perp}\ \text{(cas particulier)}$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p}\ (factorisation)$$

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vee r \vee s \qquad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r} \qquad \neg r}{p \vee r}}{p}$$

Notation : Une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$ s'écrit

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est réfutable ssi $\Delta \vdash_R \bot$.

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vee r \vee s \qquad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \qquad \neg r}{p} \qquad \neg p}{\bot}$$

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \bot$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \bot$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète, i.e., si $\Delta \models A$, alors $\Delta \vdash_R A$ et si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \bot$.