Devoir pour le 29 novembre 2004

L'objet du devoir est d'étudier la combinatoire sur ω_1, premier ordinal non dénombrable, et de démontrer le théorème suivant, découvert par Jack Silver en 1975, affirmant que, si on a $2^\kappa = \kappa^+$ pour tout cardinal $\kappa < \aleph_{\omega_1}$, alors on a $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$.

On rappelle que ω_1 et $\aleph_1$ sont deux noms du même objet.

1. Ensembles clos cofinaux

On commence par introduire un filtre de parties de ω_1.

Définition (clos)**.** Une partie C de ω_1 est dite *close* si elle est fermée pour la topologie de l'ordre sur ω_1, c'est-à-dire si, pour toute suite croissante $\theta_1 < \theta_2 < \dots$ dans C, la limite $\sup_{n<\omega} \theta_n$ est dans C. Une partie C de ω_1 est dite *cofinale* si on a $(\forall\theta < \omega_1)(\exists\theta' \in C)(\theta \leqslant \theta')$.

Question 1. Montrer que les ordinaux limites forment une partie close cofinale dans ω_1.

Question 2. Montrer que toute intersection d'ensembles clos est clos.

Question 3. Soient C_1, C_2 deux parties closes cofinale de ω_1. Montrer que $C_1 \cap C_2$ est close cofinale.

Question 4. Soit $(C_n)_{n<\omega}$ une suite de parties closes cofinales de ω_1. Montrer que $\bigcap_{n<\omega} C_n$ est close cofinael. [On pourra d'abord supposer la famille décroissante vis-à-vis de l'intersection.]

Question 5. Donner un exemple d'une famille de parties closes cofinales $(C_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ dont l'intersection est vide.

Définition (intersection diagonale)**.** Pour $(C_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ suite de parties de ω_1, l'*intersection diagonale* $\triangle_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ est l'ensemble C défini par

$$\xi \in C \Leftrightarrow (\forall\alpha < \xi)(\xi \in C_\alpha).$$

Question 6. Soit $(C_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ une suite de parties closes cofinales de ω_1. Montrer que $\triangle_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ est close cofinale.

2. Ensembles stationnaires

Définition (stationnaire)**.** Une partie S de ω_1 est dite *stationnaire* si elle rencontre tout partie close cofinale, c'est-à-dire si on a $S \cap C \neq \varnothing$ pour tout clos cofinal C.

Question 7. Soit S stationnaire et C close cofinale dans ω_1. Montrer que $S \cap C$ est stationnaire.

Question 8. Soit S stationnaire dans ω_1. Montrer que S est cofinale dans ω_1 et que son cardinal est ω_1.

Question 9. Soit $f : \omega_1 \to \omega_1$ telle que $\{\xi \; ; \; f(\xi) < \xi\}$ est stationnaire. Montrer qu'il existe α tel que $\{\xi \; ; \; f(\xi) = \alpha\}$ est stationnaire. [Appliquer la question 6 aux ensembles $\{\xi \; ; \; f(\xi) \neq \alpha\}$.] Existe-t-il un résultat analogue quand ω_1 est remplacé par ω ?

3. Un lemme préparatoire

Question 10. On suppose que $\prec$ est un ordre total sur A tel que tout élément a au plus κ prédécesseurs. Construire à l'aide d'une fonction de choix sur $\mathfrak{P}(A)$ une suite $(x_\alpha)_{\alpha<\theta}$ strictement croissante et cofinale dans $(A, \prec)$. Montrer $\theta \leqslant \kappa^+$. En déduire $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa^+$ en écrivant $A = \bigcup_{\alpha<\theta} I(x_\alpha)$, où $I(x)$ est le segment initial déterminé par x.

4. Familles de fonctions presque disjointes

Dans la suite, on suppose $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ pour tout $\alpha < \omega_1$.

Question 11. Montrer $\kappa^\lambda < \aleph_{\omega_1}$ pour κ, λ cardinaux infinis $< \aleph_{\omega_1}$.

Définition (presque disjoint)**.** Deux fonctions f, g de domaine ω_1 (ou, de façon équivalente, deux suites indexées par ω_1) sont dites *presque disjointes* s'il existe α_0 tel que $\alpha \geqslant \alpha_0$ entraîne $f(\alpha) \neq g(\alpha)$.

Pour $X \subseteq \aleph_{\omega_1}$, on appelle f_X la suite $(X \cap \aleph_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, qui, par définition, appartient à l'ensemble $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{P}(\aleph_\alpha)$.

Question 12. Montrer que $X \neq Y$ entraîne que f_X et f_Y sont presque disjointes.

Question 13. Soit f dans $\prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_\alpha$. On définit $f' : \omega_1 \to \omega_1$ par $f'(\alpha) := \inf\{\beta \; ; \; f(\alpha) \in \aleph_\beta\}$. Montrer qu'on a $f'(\alpha) < \alpha$ pour α ordinal limite. En déduire que $\{\alpha < \omega_1 \; ; \; f'(\alpha) < \alpha\}$ est stationnaire, et conclure qu'il existe un ordinal β_f et un ensemble stationnaire S_f tels que $f(\alpha)$ appartient à $\aleph_{\beta_f}$ pour tout α dans S_f.

Question 14. Montrer que, si f et g sont presque disjointes, alors on a $(S_f, f{\restriction}_{S_f}) \neq (S_g, g{\restriction}_{S_g})$. En déduire que, si F est un sous-ensemble de $\prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_\alpha$ composé de suites deux à deux presque disjointes, alors $\mathrm{card}(F)$ est au plus $\aleph_{\omega_1}$. [Dénombrer les couples $(S, f{\restriction}_S)$ possibles et utiliser la question 11.]

Question 15. Montrer le même résultat en supposant que F sous-ensemble de $\prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$, où A_α est de cardinal au plus $\aleph_\alpha$ pour tout α, puis en supposant seulement que $\{\alpha < \omega_1 \; ; \; \mathrm{card}(A_\alpha) \leqslant \aleph_\alpha\}$ est stationnaire.

5. Le théorème de Silver

Question 16. Montrer qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur ω_1 contenant tous les ensembles clos cofinaux. Montrer que tout élément de $\mathcal{U}$ est stationnaire.

On pose $P := \prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+1}$, et on définit $\prec$ relation binaire sur P par

$$f \prec g \text{ si et seulement si } \{\alpha\ ;\ f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U} \tag{1}$$

Question 17. Montrer que $\prec$ est un ordre sur P, et que, si F est un sous-ensemble de P composé de suites deux à deux presque disjointes, alors la restriction de $\prec$ est un ordre total tel que, dans $(F, \prec\restriction_F)$, tout élément a au plus $\aleph_{\omega_1}$ prédécesseurs. [Utilisera la question 15.]

Question 18. Déduire de la question 10 que tout sous-ensemble de P composé de suites deux à deux presque disjointes a pour cardinal au plus $\aleph_{\omega_1+1}$. Déduire de la question 12 que $\mathfrak{P}(\aleph_{\omega_1})$ a pour cardinal $\aleph_{\omega_1+1}$.