TD 5 : calcul des prédicats

Thomas Chomette

07/11/03

1. Classes finiment axiomatisables
On rappelle que, pour $\mathcal{L}$ un langage et K une classe de $\mathcal{L}$-structures, K est dit *axiomatisable* s'il existe une théorie T de $\mathcal{L}$ telle que :

$$\text{Pour toute } \mathcal{L}\text{-structure } \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} \in \mathrm{K} \text{ ssi } \mathcal{M} \models \mathrm{T}.$$

La classe K est *finiment axiomatisable* si il existe une théorie finie qui axiomatise K.

1 Montrer que si T axiomatise la classe K, alors K est finiment axiomatisable si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que T' axiomatise K.

2 Montrer que la classe des ensembles infinis n'est pas finiment axiomatisable.

3 Soit $\mathcal{L} = \{f\}$, avec f un symbole de fonction unaire.

Écrire un ensemble d'énoncés T dont les modèles sont les ensembles munis d'une bijection (l'interprétation de f) sans cycles. T est-elle finiment axiomatisable ?

Montrer que T est complète, mais pas catégorique en tout cardinal infini.

4 Soit $\mathcal{L} = \{\mathrm{R}\}$, avec R un symbole de relation binaire. Soit K_0 la classe des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M} = \langle \mathrm{M}, \mathrm{R}^{\mathcal{M}} \rangle$ telles que :

– $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$ est une relation d'équivalence,
– $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$ a une infinité de classes d'équivalence
– toutes les classes d'équivalence de $\mathrm{R}^{\mathcal{M}}$ sont infinies.

Trouver une théorie T_0 qui axiomatise K_0. K_0 est-elle finiment axiomatisable ?

La théorie T_0 est-elle catégorique en un cardinal infini ? en tout cardinal infini ? Montrer que la théorie T_0 est complète.

2. Équivalence élémentaire et isomorphie
Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire fini, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes. On suppose que l'ensemble de base M de $\mathcal{M}$ est fini.

1 Montrer que l'ensemble de base N de $\mathcal{N}$ est fini, et de même cardinal que M.

2 Montrer que l'on peut décrire le comportement d'une fonction ou d'une relation de $\mathcal{L}$ dans le modèle $\mathcal{M}$ par une formule du langage.

3 Trouver une formule équivalente à la théorie complète de $\mathcal{M}$.

4 En déduire que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont isomorphes.

3. Modèles finis et infinis

1 Si F est un énoncé du langage de l'égalité, on note Sp(F) (spectre) l'ensemble des cardinaux des modèles finis de F. Les ensembles suivants sont-il des spectres ?
   - $\emptyset$, $\{n\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n\}$
   - l'ensemble des entiers pairs,
   - l'ensemble des entiers carrés de nombres premiers.

2 Cette notion a-t'elle un intérêt si l'on remplace la formule F par une théorie ?

3 Construire une théorie finie et cohérente dont tous les modèles sont infinis.

4 Dans le langage des groupes ($\mathcal{L} = \{\times\}$), soit T la théorie des groupes sans torsion non triviaux. Montrer que T n'admet que des modèles infinis. T est-elle finiment axiomatisable ?

5 Soient T_1 et T_2 deux théories sur un langage $\mathcal{L}$ telles que $\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ soit contradictoire. Montrer qu'il existe un énoncé F telle que $\mathrm{T}_1 \vdash \mathrm{F}$ et $\mathrm{T}_2 \vdash \neg\mathrm{F}$.

6 Soient T_1 et T_2 deux théories sur un langage $\mathcal{L}$. On suppose que toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est un modèle de T_1 si et seulement si elle n'est pas modèle de T_2. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

7 La notion de groupe de torsion est-elle axiomatisable ?

4. Ensembles ordonnés

On considère le langage $\mathcal{L} = \{\mathrm{R}\}$ constitué d'une relation binaire, et T la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément. On s'intéresse désormais aux modèles de T.

1 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des rationnels et b un réel. Construire un automorphisme de $(\mathbb{R}, \leq)$ qui fixe les points $a_1, \ldots, a_n$ et envoie b sur un rationnel.

2 En déduire, en utilisant le critère de Vaught, que $(\mathbb{Q}, \leq)$ est une sous-structure élémentaire de $(\mathbb{R}, \leq)$.

3 Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T, d'ensembles de base M et N respectivement. Montrer que, si $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$, alors $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.

4 Montrer que le $(\mathbb{Q}, \leq)$ se plonge dans tout modèle de T.

5 En déduire que T est complète.

5. Espaces vectoriels sur un corps fixé

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On considère le langage $\mathcal{L}$ constitué d'un symbole de fonction g d'arité 2, et de fonctions unaires f_α, pour chaque élément α du corps $\mathbb{K}$.

1 Écrire une théorie sur le langage $\mathcal{L}$ dont les modèles sont exactement les espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

2 Soit κ le cardinal du corps $\mathbb{K}$. Montrer que la théorie précédente est catégorique en tout cardinal infini et strictement supérieur à κ.

3 En déduire que la théorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est complète lorsque $\mathbb{K}$ est infini.

   Qu'en est-il lorsque $\mathbb{K}$ est fini ? Que doit-on rajouter ?