

TD 3 : Théorème de compacité

Thomas Chomette

17/10/03

1. Théorème de compacité

Un ensemble de formules T est dit **satisfaisable** si et seulement si il existe une distribution de valeurs de vérités qui affecte la valeur 1 à toutes les formules de T . Sinon, T est dite **contradictoire**.

Soit T un ensemble de formules et F une formule. On dit que F est **conséquence** de T , et l'on note $T \vdash^* F$, si et seulement si toute distribution de valeurs de vérité qui satisfait T satisfait également F . Montrer que les formulations suivantes du théorème de compacité sont équivalentes :

- 1 Un ensemble T de formules est satisfaisable si et seulement si tout sous-ensemble fini T' de T est satisfaisable.
- 2 Un ensemble de formules T est contradictoire si et seulement si T admet un sous-ensemble fini T' contradictoire.
- 3 $T \vdash^* F$ si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que la théorie $T' \cup \{\neg F\}$ est contradictoire.
- 4 $T \vdash^* F$ si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que $T' \vdash^* F$.
- 5 T est contradictoire si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T' de T et une formule F tel que $T' \vdash^* F$ et $T' \vdash^* \neg F$.

2. Relation d'ordre

- 1 Soit $(E_i, \leq_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés, indexée par un ensemble I . Construire un ensemble de formules qui est satisfaisable si et seulement si il existe une relation d'ordre \leq sur $\bigcup_{i \in I} E_i$ qui prolonge tous les ordres \leq_i .
- 2 Construire un ensemble de formules qui est satisfaisable si et seulement si il existe une relation d'ordre *totale* \leq sur $\bigcup_{i \in I} E_i$ qui prolonge tous les ordres \leq_i .
- 3 Soit E un ensemble. En utilisant le théorème de compacité, montrer qu'il existe sur E une relation d'ordre totale.
- (4 Peut-on montrer par un raisonnement similaire l'existence d'un bon ordre sur A .)

3. Fonctions injectives (Lemme des mariages)

On considère deux ensembles E et F et une relation binaire $R \subseteq E \times F$. Pour chaque élément $x \in E$, on note R_x l'ensemble des éléments de F qui sont en relation avec x :

$$R_x = \{y \in F; (x, y) \in R\}.$$

Pour chaque partie $A \subseteq E$, on appelle **image de A par R** l'ensemble

$$R_A = \bigcup_{x \in A} R_x.$$

On fait les deux hypothèses suivantes :

- (i) Pour toute partie A de E, $\text{card}(R_A) \geq \text{card}(A)$.
- (ii) Pour tout élément x de E, R_x est fini.

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

(P) Il existe $f : E \rightarrow F$ injective telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in R_x$.

- 1 On suppose que E est fini. Sans utiliser l'hypothèse (ii), démontrer (P) par récurrence sur le cardinal de E, en étudiant deux cas :
 - a il existe une partie A non vide de E, $A \neq E$, telle que $\text{card}(A) = \text{card}(R_A)$;
 - b pour toute partie non vide $A \subseteq E$, $A \neq E$, on a $\text{card}(A) < \text{card}(R_A)$.
- 2 Donner un exemple où l'hypothèse (i) est vraie, tandis que l'hypothèse (ii) et (P) sont fausses.
- 3 En utilisant le théorème de compacité, montrer (P) lorsque E est infini.

4. Extension du théorème de compacité ?

Soit P un ensemble de variables propositionnelles, et \mathcal{F} l'ensemble des formules sur P. On indice l'ensemble des formules par un ensemble I, c'est-à-dire que l'on écrit :

$$\mathcal{F} = \{F_i, \quad i \in I\}$$

On pose alors
$$\mathcal{F}^\vee = \left\{ \bigvee_{i \in J} F_i, \quad J \subset I \text{ non vide.} \right\}$$

- 1 Si P est fini, combien y a-t-il de formules sur P à équivalence près ?
- 2 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur P pour que $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{F}$.

On se place désormais dans le cas contraire.

- 3 Soit D un sous-ensemble de $\{0, 1\}^P$. À quelle condition existe-t'il un élément F de \mathcal{F}^\vee tel que

$$D = \left\{ \delta \in \{0, 1\}^P \mid \delta(F) = 1 \right\}$$

- 4 Montrer qu'un sous-ensemble de \mathcal{F}^\vee peut être finiment satisfaisable mais non satisfaisable.
- 5 Que se passe-t'il si l'on remplace le connecteur \vee par le connecteur \wedge dans ce qui précède.

5. Groupes ordonnables.

Un groupe (G, \cdot) est dit ordonnable si l'on peut construire une relation d'ordre \leq sur G compatible avec l'opération \cdot c'est-à-dire vérifiant la propriété :

$$\forall x, y, z \in G, \quad (x \leq y \Rightarrow x.z \leq y.z)$$

Un élément $x \in G \setminus \{1\}$ est dit "de torsion" s'il existe un entier n tel que $x^n = 1$, où 1 désigne l'élément neutre de G. Un groupe est "sans torsion" s'il ne contient aucun élément de torsion.

- 1 Montrer que, si G contient un élément de torsion, alors G n'est pas ordonnable.
- 2 On admet le résultat suivant : « Tout groupe abélien sans torsion et de type fini est isomorphe à un groupe de type $(\mathbb{Z}^p, +)$. »
Montrer que tout groupe abélien sans torsion et de type fini est ordonnable.
- 3 Soit G un groupe abélien. Construire un ensemble de formules satisfaisables si et seulement si le groupe G est ordonnable.
- 4 En utilisant le théorème de compacité, montrer qu'un groupe abélien G est ordonnable si et seulement si tous ses sous groupes de type fini le sont.
- 5 En déduire qu'un groupe abélien G est ordonnable si et seulement si il est sans torsion.

6. Théorème de Ramsey

On appelle **coloriage** d'un ensemble A une fonction χ de A dans un ensemble fini, la couleur d'un élément étant son image par χ .

Pour tout ensemble A , on notera $[A]^2$ l'ensemble des sous-ensembles de A à deux éléments.

Enfin, on identifiera dans l'exercice un entier naturel N à l'ensemble de ses prédécesseurs, soit l'ensemble $\{0, 1, \dots, N - 1\}$.

- (1 Montrer la version infinie du théorème de Ramsey :
« Pour tout coloriage χ de $[\mathbb{N}]^2$ en deux couleurs, il existe un sous ensemble A de \mathbb{N} infini, tel que le coloriage χ soit constant sur $[A]^2$. »)
- 2 En déduire la version finie suivante :
« Pour tout entier n , il existe un entier N tel que, pour tout coloriage χ de $[N]^2$ en deux couleurs, il existe un sous-ensemble A de $\{0, \dots, N - 1\}$ à n éléments, et tel que χ soit constant sur $[A]^2$. »

Applications du théorème de Ramsey :

- 3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On considère le coloriage des ensembles de deux entiers :

$$f(\{i, j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \text{ et } u_i \leq u_j \\ 1 & \text{si } i < j \text{ et } u_i > u_j \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite monotone.

- 4 Soit E un ensemble infini et R une relation binaire sur E . Montrer que E contient une partie infinie d'éléments deux à deux en relation (par R), ou une partie infinie d'éléments dont aucune paire d'éléments n'est dans R .
- 5 On considère le jeu suivant, à deux joueurs. On place un certain nombre de points sur une feuille. Chaque joueur, à son tour, relie par un trait deux points encore non reliés, trait rouge pour le premier joueur, bleu pour le second. Le premier joueur ayant ainsi tracé un pentagone est déclaré vainqueur. Montrer que, si l'on place au départ suffisamment de points, il ne peut y avoir de partie nulle. Quel joueur a alors une stratégie gagnante ?

7. Notation polonaise

Soit $V = \{X, Y, Z, \dots\}$ un ensemble (fini ou dénombrable) de variables. Le langage des expressions booléennes sur V est défini par la *grammaire*

$$E ::= V \mid (E \wedge E) \mid (E \vee E) \quad (1)$$

qui a la propriété de *lecture unique*. La notation définie par la grammaire ci-dessus s'appelle *notation infixe parenthésée*.

- 1 On voudrait pouvoir utiliser une notation infixe, mais sans s'imposer trop de parenthèses. Soit la grammaire

$$E_i ::= V \mid E_i \wedge E_i \mid E_i \vee E_i \mid (E_i) \quad (2)$$

Vérifiez que cette grammaire n'a pas la propriété de lecture unique. Quelles conséquences cela entraîne-t-il ?

- 2 Il est néanmoins possible de garantir la lecture unique sans parenthéser toutes les sous-expressions. Soit la grammaire

$$E_p ::= V \mid \wedge E_p E_p \mid \vee E_p E_p \quad (3)$$

Montrez que cette grammaire a la propriété de lecture unique.

Ce style de notation fut introduit par le logicien polonais Łukasiewicz au 19e siècle, et s'appelle notation *préfixe* ou *polonaise*. On aurait pu obtenir le même résultat avec la grammaire

$$E_r ::= V \mid E_r E_r \wedge \mid E_r E_r \vee \quad (4)$$

qui définit la notation *postfixe* ou *polonaise inverse* (en anglais, *Reverse Polish Notation*, *R.P.N.*).