TD 12 : théorie des ensembles

Thomas Chomette

09/01/04

1. Somme ordinale

Soit I un ensemble ordonné par une relation de d'ordre $<_{\mathrm{I}}$, et $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'ensembles ordonnés (on note $<_{\alpha_i}$ la relation d'ordre sur α_i).
On définit l'union disjointe $\dot{\bigcup\limits_{i\in\mathrm{I}}}\alpha_i$ de la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}}$ par : $\dot{\bigcup\limits_{i\in\mathrm{I}}}\alpha_i = \bigcup\limits_{i\in\mathrm{I}}(\alpha_i \times \{i\})$

1 Montrer que cet ensemble est bien défini (*i.e.* que c'est bien un ensemble, que l'on peut construire par les axiomes de ZF).

On munit alors cet ensemble de l'ordre lexicographique : $(a,i) < (b,j)$ si et seulement si « $i <_{\mathrm{I}} j$ ou $(i = j$ et $a <_{\alpha_i} b$ ».

2 Montrer que ceci définit bien une relation d'ordre sur l'union disjointe de la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Montrer que si $<_{\mathrm{I}}$ est un bon ordre, ainsi que tous les ordres $<_{\alpha_i}$, alors l'ordre construit est aussi un bon ordre.

Dans le cas où $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille d'ordinaux (et I un ordinal), on appelle somme ordinale de la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}}$, et on note $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}\alpha_i$ l'unique ordinal isomorphe au bon ordre ainsi construit. Si $\mathrm{I} = 2$, on le note $\alpha_0 + \alpha_1 \ldots$

3 Montrer que l'addition ordinale est associative, non commutative, que 0 est élément neutre, que pour tout ordinal α, $\alpha + 1$ est le successeur $\alpha \cup \{\alpha\}$ de α.

4 Montrer la monotonie à droite : $\quad \beta < \beta' \Longrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$
En déduire la régularité à gauche : $\quad \alpha + \beta = \alpha + \beta' \Longrightarrow \beta = \beta'$
Enfin, montrer que la somme ordinale n'est ni monotone à gauche (au sens strict) ni régulière à droite, mais que l'on a : $\alpha \leq \alpha' \Longrightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$

5 Montrer que la somme est la seule opération binaire sur les ordinaux vérifiant :

$$\alpha + 0 = \alpha \ ; \quad \alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta) \quad (s \text{ est la fonction successeur.})$$
$$\alpha + \sup_{\gamma<\beta}\gamma = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma) \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite.}$$

2. Axiome de l'infini

Pour tout ordinal α, on appelle *successeur* de α l'ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$. On dit que β a un *prédecesseur* s'il existe un ordinal α tel que β est le successeur de α. Un ordinal α est *fini* si tout ordinal $\beta \leq \alpha$, $\beta \neq \emptyset$ a un prédecesseur.

1 Comment s'écrit l'énoncé "α est un ordinal fini" ?

2 Montrer que dans la théorie ZF privée de l'axiome de l'infini, les deux énoncés suivants sont équivalents :

i) il existe un ordinal infini ;

ii) il existe un ensemble a et une injection de a dans une partie propre de a.

3. Axiome du choix

L'axiome du choix peut s'énoncer sous la forme suivante :
(AC) « Pour tout ensemble a dont les éléments sont non-vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble b dont l'intersection avec chacun des éléments de a est un singleton. »

Une *fonction de choix* sur un ensemble a est une application φ de l'ensemble des parties non-vides de a dans a telle que $\varphi(x) \in x$ pour tout x dans $dom(\varphi)$.

Montrer que (AC) est équivalent, dans ZF, à chacun des énoncés suivants :

1 Pour tout ensemble a, il existe au moins une fonction de choix sur a.

2 Si $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille d'ensembles non vides, alors $\prod\limits_{i\in \mathrm{I}} a_i$ est non vide.

(3 Quels que soient les ensembles x et y et l'application surjective g de x dans y, il existe une application h de y dans x telle que $g \circ h$ soit l'application identique de y dans y.)

4. Retour sur Cantor-Bernstein

On se place dans la théorie ZF+AC. On rappelle qu'un cardinal est un ordinal qui n'est équipotent à aucun ordinal strictement plus petit.

1 Montrer que si A est une partie d'un ordinal ω, alors la relation d'appartenance sur A est un bon ordre, qui est isomorphe à un ordinal plus petit que ω.

2 Montrer que, si le cardinal α s'injecte dans le cardinal β, alors $\alpha \leq \beta$.

3 En déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

5. Axiome de fondation, bis

Dans un univers $\mathcal{U}$ modèle de ZF, on définit par induction une relation fonctionnelle $y = \mathrm{V}_\alpha$ de domaine On en posant, pour tout ordinal α, $\mathrm{V}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta)$.

1 Pour tout α, montrer que $\mathrm{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathrm{V}_\alpha)$, et $\mathrm{V}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{V}_\beta$ pour α limite.

V est alors la collection qui est la réunion (au sens intuitif) des V_α, c'est-à-dire la collection définie par l'énoncé $\exists\alpha\,(\mathrm{O}n(\alpha) \wedge x \in \mathrm{V}_\alpha)$.

2 Montrer qu'un ensemble a est dans V si et seulement si tous ses éléments sont dans V. Montrer que tout ordinal est dans V.

3 Montrer que V est une sous-structure de $\mathcal{U}$ qui satisfait encore ZF, ainsi que l'axiome de fondation. En déduire que l'axiome $\forall x \mathrm{V}(x)$ entraîne l'axiome de fondation.

6. Ordinaux

1 Montrer que si A est un ensemble d'ordinaux, alors $\beta = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{A}} \alpha$ est un ordinal, qui est la plus petite borne supérieure de A.

2 En déduire que On n'est pas un ensemble.