TD 8 : corrections et indications

4/12/02

2. Modèles non standards

1 Il s'agit ici de faire une démonstration formelle des trois propriétés suivantes :

- $\forall x\ 0+x = x$ (réflexivité de $\leq$). Se montrer en utilisant le schéma d'induction.
- $\forall x \forall y \forall z\ \ ((\exists t\ t+x = y) \wedge (\exists t\ t+y = z)) \Rightarrow (\exists t\ t+x = z)$ (transitivité de $\leq$). Idem en un peu plus dur.
- $\forall x \forall y\ \ ((\exists z\ z+x = y) \wedge (\exists z\ z+y = x)) \Rightarrow x = y$ (antisymétrie de $\leq$). Idem

2 Là encore, de nombreuses choses sont à vérifier : $x \leq y$ signifie par définition $\exists z, z+x = y$. Si de plus $x \neq y$, alors on a nécessairement $z \neq 0$ (cf le résultat $\forall x, 0+x = x$ démontré dans l'exercice 1), et donc z s'écrit sz'. mOn a donc $sz'+x = y$, soit d'après l'exercice 1 toujours $s(z'+x) = y$ ou encore $z'+sx = y$, d'où $sx \leq y$.

Inversement, si l'on a $x = y$ ou $sx \leq y$, alors (dans $\mathcal{AP}$), on obtient $0+x = y$ ou $\exists z, z+sx = y$, auquel cas $sz+x = y$. Et donc $x \leq y$.

Dans $\mathcal{P}_0$, je ne sais pas (le modèle qu'on a tenté de construire ne marche pas).

3 Il suffit d'ajouter une constante c au langage, et de considérer la théorie $\mathrm{T} = \mathcal{AP} \cup \{c \neq 0, c \neq s0, c \neq ss0, \ldots\}$. T est finiment consistante (il suffit d'interpréter c par un entier standart suffisamment grand), donc consistante par compacité. Par Lowenheim Skolem, on peut en trouver un modèle dénombrable $\mathcal{M}$. Revenant au langage de l'arithmétique, $\mathcal{M}$ donne un modèle dénombrable non standart : l'interprétation de C ne peut être un entier standart.

4 $\mathcal{M}$ est un modèle non standard. Soit M l'ensemble des entiers non standards. Alors l'ensemble ordonné $\left(|\mathcal{M}|, \leq^{\mathcal{M}}\right)$ est isomorphe en tant qu'ensemble ordonné à $(\mathbb{N}+\mathrm{M}, \leq)$, où l'ordre est l'ordre naturel sur les entiers, l'ordre induit sur M par $\mathcal{M}$, et les éléments de $\mathbb{N}$ sont tous inférieurs à tous les éléments de M. (On n'a pas fait grand-chose, là...)

Ensuite, on définit sur M une relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \left(s^{\mathcal{M}}\right)^k(y)$$

($\left(s^{\mathcal{M}}\right)^k$ est l'itérée k-ième de la fonction successeur dans $\mathcal{M}$, l'itérée $-k$-ième de l'application inverse lorsque $k < 0$, celle-ci étant bien définie car tout entier non nul a un unique prédécesseur).

On montrer sans problème que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Soit A l'ensemble quotient $\mathrm{M}/\mathcal{R}$. Alors l'ordre $\leq$ sur M induit une relation d'ordre sur A. En effet si $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont deux classes distinctes, l'ordre entre x et y est le même quels que soient les représentants choisis : si $x \leq y$ alors $\left(s^{\mathcal{M}}\right)^k(x) \leq \left(s^{\mathcal{M}}\right)^l(x)$ pour tous entiers k et l (se montrer par récurrence sur k et l, par récurrence au sens naïf, pas par le schéma d'induction).

M est alors isomorphe, en tant qu'ensemble ordonné, au produit $\mathrm{A} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique. Soient en effet $(x_a)_{a \in \mathrm{A}}$ une famille de représentants de chacune des classes de A. Tout élément x de M s'écrit de manière unique comme $\left(s^{\mathcal{M}}\right)^k(x_a)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'application qui à x associe le couple (a, k) est donc une bijection de M sur $\mathrm{A} \times \mathbb{Z}$. L'ordre induit sur $\mathrm{A} \times \mathbb{Z}$ par cette bijection est l'ordre lexicographique, c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Reste une seule chose à montrer : A, en tant qu'ensemble ordonné, est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

– A n'a pas de plus grand élément. En effet, supposons qu'une classe a soit maximale. Soit x_a un représentant. Alors $x_a \leq x_a + x_a$, la classe de $x_a + x_a$ est donc au moins égale à celle de x_a. C'est donc la classe a puisque celle-ci est le plus grand élément. Mais alors, cela signifie que $x_a + x_a$ s'écrit sous la forme $\left(s^{\mathcal{M}}\right)^k(x_a)$, c'est-à-dire $x_a + k$, où $k \in \mathbb{N}$. Ceci est absurde car alors $x_a = k$ (on montre grâce au schéma d'induction que tout élément est régulier pour l'addition).
– De la même façon, A n'a pas de plus petit élément. Sinon, soit x_a un représentant du plus petit élément a. On montre dans $\mathcal{P}$ (par le schéma d'induction) la formule $\forall x \exists y\ (y + y = x) \vee (y + y = sx)$. soit donc y_a un élément tel que $y_a + y_a = x_a$ ou $y_a + y_a = sx_a$. Quitte à changer de représentant, on peut supposer $y_a + y_a = x_a$. Mais alors, y_a est lui-même non standard (la somme de deux entiers standards est un entier standard) donc par minimalité de a, on a $y_a \in a$, et donc $x_a = y_a + k$ pour un entier standard k. On obtient après simplification par y_a l'égalité $y_a = k$, ce qui contredit le caractère non standard de y_a.
– A est un ordre dense. Soient en effet x_a et x_b des représentants de classes $a < b$. Soit x_c tel que $x_c + x_c = x_a + x_b$ (ou $s(x_a + x_b)$, ce qui revient au même quitte à prendre en fait sx_b comme représentant de b). Si c (classe de x_c) est inférieure ou égale à a, on peut écrire $x_a = x_c + y$, donc après simplification par x_c : $x_c = y + x_b$, ce qui est absurde car nécessairement $c < b$... Idem si $c \geq b$. Donc $a < c < b$.

On sait que tout ordre dénombrable et dense, sans premier ni dernier élément, est isormorphe à $\mathbb{Q}$. Donc (A est dénombrable car $\mathcal{M}$ l'est) il existe un isomorphisque ψ de l'ensemble ordonné A sur $\mathbb{Q}$.

On a bien un isomorphisme de $\left(|\mathcal{M}|, \leq^{\mathcal{M}}\right)$ sur l'ensemble ordonné $\mathbb{N} + \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$: a un entier standard on associe lui-même, à un non standard $x = \left(s^{\mathcal{M}}\right)^k(x_a)$ on associe $(\psi(a), k)$.

5 On utilise non pas le théorème de compacité (qui nous donnerait un non standard dans UN modèle), mais le schéma d'induction. Supposons le résultat faux ($i.e$ F$[x]$ faux pour x non standard).

Soit G$[x]$ la formule $\exists y\ (x \leq y) \wedge \mathrm{F}[x]$. Alors $\mathcal{M}$ satisfait G$[0]$ puisque F$[x]$ est vraie pour une infinité de standards.

D'autre part pour tout entier x, l'implication $\mathrm{G}[x] \Rightarrow \mathrm{G}[sx]$ est vraie : si x

est standard, sx aussi donc par hypothèse il y a des entiers standards y plus grands que sx qui satisfont F$[y]$. Autrement dit, la conclusion de l'implication G$[x] \Rightarrow$ G$[sx]$ est vraie donc l'implication aussi. Et si x est non standard, notre hyp[othèse supplémentaire signifie que G$[x]$ est fausse. La prémisse est fausse, donc l'implication G$[x] \Rightarrow$ G$[sx]$ est encore vraie.
Pour résumer, $\mathcal{M}$ satisfait la formule $\forall x$ G$[x] \Rightarrow$ G$[sx]$. $\mathcal{M}$ satisfait donc la formule : G$[0] \wedge (\forall x$ G$[x] \Rightarrow$ G$[sx])$
D'autre part, $\mathcal{M}$ satisfait nécessairement l'axiome (schéma d'induction)

$$(\mathrm{G}[0] \wedge (\forall x\ \mathrm{G}[x] \Rightarrow \mathrm{G}[sx])) \Rightarrow \forall x\ \mathrm{G}[x]$$

Par modus ponens, $\mathcal{M}$ satisfait donc $\forall x$ G$[x]$, ce qui contredit l'hypothèse F$[x]$ faux pour x non standard...
N.B. Ceci est un "faux raisonnement par l'absurde", puisque l'on contredit l'hypothèse supplémentaire, et non pas une donnée du problème. Mais il me semble que c'est sous cette forme que les choses sont le plus clair.

$\mathbb{N}$ n'est pas définissable sur vide découle immédiatement de tout ceci : si la formule F$[x]$ est satisfaite pour tout entier standard (donc une infinité), alors il existe au moins un entier non standard x tel que F$[x]$ est vrai dans $\mathcal{M}$...

3. Conjecture de Goldbach [indications]

1 Utiliser la compacité en construisant une théorie, dans un langage enrichi d'une constante, qui exprime le fait que cette constante est divisible par tous les entiers standarts.
La théorie est finiment consistante, il suffit pour le voir d'interpréter la constante dans le modèle standart par un $n!$ pour n suffisamment grand.

2 La seule chose à vérifier est que l'ensemble ainsi défini est stable par successeur (c'est immédiat) par somme (en effet la somme de deux anormaux est anormale), et par produit (idem). Les acxiomes de $\mathcal{P}_0$ sont tous universels (sauf A_2) donc stables par sous-structure. On vérifie A_2 aisément.

3 Dans $\mathcal{M}_2$, les nombres premiers non standarts sont nécessairement de la forme $a+1$ ou $a-1$ avec a anormal ($a+n$ étant nécessairement divisible par n...)

4 Soit a un élément anormal (donc pair). Supposons $a + 26 = p_1 + p_2$, avec p_1 et p_2 premiers. Alors p_1 et p_2 ne peuvent être tous deux standarts (leur somme le serait) ni tous deux de la forme $a_1 \pm 1$ et $a_2 \pm 1$ respectivement , sinon leur somme serait forcément a, $a-2$ ou $a+2$. Le dernier cas (p_1 standart et p_2 non) ne marche pas non plus, car alors $p_2 = a \pm 1$, ce qui donne $p_1 = 25$ ou 27, qui ne sont pas premiers...

4. Sous-structures élémentaires [indications]

Il s'agit d'appliquer correctement le critère de Tarsky-Vaught. Soit F$[v, x_1, \ldots, x_k]$ une formule, et $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{M}_1^k$ tels que $\mathcal{M}_2 \models \exists v \mathrm{F}[v, a_1, \ldots, a_k]$. On veut trouver $b \in \mathrm{M}_1$ tel que $\mathcal{M}_2 \models \mathrm{F}[b, a_1, \ldots, a_k]$.

Soit G$[v, x_1, \ldots x_k]$ la formule F$[v, x_1, \ldots, x_k] \wedge \forall w < v, \neg$F$[w, x_1, \ldots, x_k]$.
Nécessairement, on a aussi $\mathcal{M}_2 \models \exists v \mathrm{G}[v, a_1, \ldots, a_k]$. Et G définit une fonction f de M_2^k dans M_2, donc $f(a_1, \ldots, a_k) = b \in \mathrm{M}_1$. C'est-à-dire qu'il existe un élément $b \in \mathrm{M}_1$ tel que $\mathcal{M}_2 \models \mathrm{G}[b, a_1, \ldots, a_k]$. En particulier, $\mathcal{M}_2 \models \mathrm{F}[b, a_1, \ldots, a_k]$, ce qui permet de conclure.