

Ordres denses sans premier ni dernier élément. [Cori-Lascar]

09/11/03

Méthode du va-et-vient : Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux modèles dénombrables de la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément, soient $M = \{m_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $N = \{n_i, i \in \mathbb{N}\}$ leurs ensembles de bases. On va définir par récurrence deux suites $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ à valeur dans M et $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$ à valeur dans N , telles que pour tout entier p , les suites (a_0, \dots, a_p) et (b_0, \dots, b_p) vérifient les mêmes formules atomiques dans \mathcal{M} et \mathcal{N} respectivement.

- Si $p = 2i$, on pose $a_p = m_i$, et l'on cherche un élément $b_p \in N$ tel que les suites (a_0, \dots, a_p) et (b_0, \dots, b_p) vérifient les mêmes formules atomiques. C'est possible par les axiomes de la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément. Il suffit pour cela que ces éléments soient rangés dans le même ordre : si a_p est plus petit que les éléments a_0, \dots, a_{p-1} , il suffit de trouver un élément dans N plus petit que b_0, \dots, b_{p-1} , ce qui est possible puisqu'il n'y a pas de premier élément. Et ainsi de suite si a_p doit être strictement compris entre deux éléments a_i et a_j ...
- Si $p = 2i + 1$, on fait l'opération inverse : on pose $b_p = n_i$, et l'on trouve un élément $a_p \in M$ tel que les suites (a_0, \dots, a_p) et (b_0, \dots, b_p) vérifient les mêmes formules atomiques.

L'application de $\{a_p, p \in \mathbb{N}\}$ dans $\{b_p, p \in \mathbb{N}\}$ obtenue en posant $f(a_p) = b_p$ est bien définie : en effet, lorsque l'on a une relation du type $a_p = a_q$ (avec par exemple $p \leq q$), alors par définition de notre procédé de construction des deux suites, à l'étape q on sait que les suites finies (a_0, \dots, a_q) et (b_0, \dots, b_q) vérifient les mêmes formules atomiques. Donc $a_p = a_q$ entraîne $b_p = b_q$. Cette application est surjective par construction, elle est également injective puisque $b_p = b_q$ entraîne $a_p = a_q$ pour les mêmes raisons.

De cette façon, on obtient une bijection de M sur N . En effet, par construction tous les éléments de M sont atteints (au moins une fois) par la suite $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ puisque l'élément m_i est atteint à l'étape $2i$ du procédé. C'est-à-dire que $\{a_p, p \in \mathbb{N}\} = M$. De la même façon $\{b_p, p \in \mathbb{N}\} = N$.

Enfin, cette bijection définit un homomorphisme de \mathcal{M} dans \mathcal{N} puisque les deux suites vérifient les mêmes formules atomiques. Un homomorphisme surjectif étant un isomorphisme, on en déduit que les deux modèles \mathcal{M} et \mathcal{N} sont isomorphes. Et donc la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément est \aleph_0 -catégorique.

Toute sous-structure est élémentaire :

Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux modèles de la théorie T des ordres denses sans premier ni dernier élément, avec \mathcal{M} sous-structure de \mathcal{N} . Alors \mathcal{M} est sous-structure élémentaire de \mathcal{N} .

Ce résultat est une conséquence directe du lemme suivant :

Lemme : Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux modèles de T , $a_1, \dots, a_n \in M$ et $b_1, \dots, b_n \in N$ vérifiant, dans \mathcal{M} et \mathcal{N} respectivement, les mêmes formules atomiques. Alors pour toute formule $F[v_1, \dots, v_n]$, on a :

$$\mathcal{M} \models F[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{N} \models F[b_1, \dots, b_n]$$

En effet, une fois ce lemme établi, on conclue directement. Si \mathcal{M} est sous-structure de \mathcal{N} et $a_1, \dots, a_n \in M$, alors ces points vérifient les mêmes formules atomiques dans \mathcal{M} et \mathcal{N} (car \mathcal{M} est sous-structure de \mathcal{N}). Par le lemme, ils vérifient donc les mêmes formules dans \mathcal{M} et \mathcal{N} , ce qui exprime justement le fait que \mathcal{M} est sous-structure élémentaire de \mathcal{N} .

Démonstration du lemme : Par récurrence sur la hauteur de la formule. Le résultat est trivial pour F atomique. On vérifie également sans problème que, si le résultat est vrai pour deux formules F_1 et F_2 , alors il en est de même pour $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$ et $F_1 \vee F_2$. Reste à traiter le cas où $F[v_1, \dots, v_n] = \exists v_0 G[v_0, v_1, \dots, v_n]$ (en effet, on peut supposer que F est construite sans quantificateur universel). Supposons que

$$\mathcal{M} \models F[a_1, \dots, a_n]$$

Ceci signifie que l'on peut trouver dans M un élément a_0 tel que

$$\mathcal{M} \models G[a_0, a_1, \dots, a_n]$$

On trouve alors $b_0 \in N$ tel que les deux suites (a_0, a_1, \dots, a_n) et (b_0, b_1, \dots, b_n) vérifient les mêmes formules atomiques dans \mathcal{M} et \mathcal{N} respectivement (même principe que la méthode du va-et-vient pour trouver cet élément). Mais alors, la formule G étant de hauteur strictement inférieure à celle de F , on peut appliquer le résultat du lemme à la formule G et aux suites (a_0, a_1, \dots, a_n) et (b_0, b_1, \dots, b_n) . On obtient :

$$\mathcal{N} \models G[b_0, b_1, \dots, b_n]$$

et donc

$$\mathcal{N} \models F[b_1, \dots, b_n]$$

L'implication $\mathcal{N} \models F[b_1, \dots, b_n] \Rightarrow \mathcal{M} \models F[a_1, \dots, a_n]$ se démontre exactement de la même façon. D'où le résultat.