

TD 3 : corrections et indications

09/10/02

3. Fonctions injectives (Lemme des mariages)

1 Soit E un ensemble fini, F un ensemble et $R \subset E \times F$ vérifiant (i). Supposons (P) établie lorsque l'ensemble de départ a un cardinal strictement inférieur à celui de E .

– Dans le premier cas, soit A une partie stricte de E telle que $\text{card}(R_A) = \text{card}(A)$.

Par hypothèse d'induction appliquée à l'ensemble A , il existe une injection de A dans R_A vérifiant $x \in R_x$ pour tout élément x .

Pour tout élément x de $E \setminus A$, on pose $R'_x = R_x \setminus R_A$. Nous allons voir que la relation $R' \subset E \setminus A \times F \setminus R_A$ ainsi définie vérifie elle aussi (i). Supposons le contraire. Alors il existe une partie B de $E \setminus A$ telle que $\text{card}(R'_B) < \text{card}(B)$. Comme $\text{card}(R_A) = \text{card}(A)$ et que A et B sont disjoints, on a

$$\text{card}(R'_B) + \text{card}(R_A) < \text{card}(B) + \text{card}(A) = \text{card}(A \cup B)$$

donc $\text{card}(R'_B \cup R_A) < \text{card}(A \cup B)$

Or $R'_B = R_B \setminus R_A$, donc $R'_B \cup R_A = R_B \cup R_A$.

Il vient $\text{card}(R_B \cup R_A) < \text{card}(A \cup B)$

c'est-à-dire $\text{card}(R_{B \cup A}) < \text{card}(A \cup B)$

ce qui contredit l'hypothèse (i) pour R .

On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction à $E \setminus A$ et R' , pour trouver une injection f de $E \setminus A$ dans $F \setminus R_A$ vérifiant $f(x) \in R'_x$ pour tout x , et donc $f(x) \in R_x$.

On obtient l'injection voulue de E dans F en concaténant les deux fonctions ainsi construites (sur A et sur $E \setminus A$).

– Dans le second cas, on a donc $\text{card}(R_A) > \text{card}(A)$ pour toute partie A .

On prend alors un élément x de E , et y un élément de R_x .

Pour tout $x' \neq x$, on pose $R'_{x'} = R_{x'} \setminus \{y\}$.

On a alors, pour toute partie A de $E \setminus \{x\}$:

$$R'_A = R_A \setminus \{y\} \quad \text{donc} \quad \text{card}(R'_A) \geq \text{card}(A)$$

Comme l'ensemble $E \setminus \{x\}$ est de cardinal strictement inférieur à celui de E (E est fini...), et que la relation R' vérifie encore (i), on peut appliquer

l'hypothèse d'induction pour trouver une injection f de $E \setminus \{x\}$ dans F telle que $f(x') \in R'_{x'}$ pour tout x' . On prolonge f à E en posant $f(x) = y$.

2 Prenons $E = F = \mathbb{N}$ et $R_n = \{n\}$ pour tout entier n non nul, $R_0 = \mathbb{N}$.

La relation R ainsi définie vérifie (i), et bien sûr pas (ii). Et une fonction f vérifiant $f(x) \in R_x$ pour tout x est nécessairement l'identité sur \mathbb{N}^* . Mais alors, quel que soit l'image de 0 choisie, celle-ci va contredire l'injectivité de f . Donc (P) est fausse.

3 Il suffit de construire les formules adéquates. On prend comme ensemble de variables propositionnelles :

$$P = \{X_{x,y}, x \in E, y \in R_x\}$$

Pour que l'on ait une fonction, on doit imposer les formules :

$$\left\{ \bigvee_{y \in R_x} X_{x,y}, x \in E \right\}$$

et $\{\neg (X_{x,y} \wedge X_{x,y'}), x \in E, y \neq y' \in R_x\}$

(les premières, de la forme $\bigvee_{y \in R_x} X_{x,y}$, sont bien des formules justement grâce à l'hypothèse (ii) qui fait que nous avons affaire à une disjonction **finie** de variables propositionnelles).

Enfin, pour que la fonction soit injective, il nous faut rajouter les formules

$$\{\neg (X_{x,y} \wedge X_{x',y}), x \neq x' \in E, y \in R_x\}$$

Appliquant le théorème de compacité, cet ensemble T de formules est satisfaisable si et seulement si toutes ses parties finies le sont. Or une partie finie T' de cet ensemble de formules ne fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments x de E . Si E' décrit l'ensemble de ces éléments, alors T' est inclus dans l'ensemble de formule :

$$\begin{aligned} & \left\{ \bigvee_{y \in R_x} X_{x,y}, x \in E' \right\} \\ \cup & \left\{ \neg (X_{x,y} \wedge X_{x,y'}), x \in E', y \neq y' \in R_x \right\} \\ \cup & \left\{ \neg (X_{x,y} \wedge X_{x',y}), x \neq x' \in E', y \in R_x \right\} \end{aligned}$$

Or, une distribution de valeurs de vérités satisfaisant ces formules correspond à une injection de E' dans F vérifiant $\forall x \in E', f(x) \in R_x$. D'après la question 1, une telle injection existe, donc notre ensemble de formule est satisfaisable, et donc T' est satisfaisable.

T est donc finiment satisfaisable, donc satisfaisable d'après le théorème de compacité. Et une distribution de valeurs de vérités satisfaisant T définit une injection de E dans F vérifiant :

$$\forall x \in E, f(x) \in R_x$$

4. Extension du théorème de compacité ?

1 Les formules sont bien sûr considérées à équivalence près (sinon, nos deux ensembles son syntaxiquement toujours distincts, dès qu'il y a une variable propositionnelle)

La condition est que P soit fini. Si tel est le cas, on n'a qu'un nombre fini de formules à équivalence près (2^{2^n} , où n est le nombre de variables), et les disjonctions infinies se ramènent à des disjonctions finies puisqu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de termes distincts. . .

2 Si l'on remplace \mathcal{F}^\vee par \mathcal{F} , la condition est que D soit un ouvert-fermé élémentaire pour la topologie produit.

Les divv satisfaisait une disjonction de formules étant celle satisfaisant l'une de ces formules, la condition est ici que D soit ouvert (un ouvert s'écrit comme union d'ouvert-fermés élémentaires).

3 Considérer l'ensemble de formules :

$$\{X_0, X_n \Rightarrow X_{n+1} (n \in \mathbb{N})\} \cup \left\{ \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \neg X_n \right\}$$

4 La condition sur D est cette fois-ci que D soit fermé. Du coup, on garde le théorème de compacité : un ensemble d'éléments de \mathcal{F}^\wedge est satisfaisable si et seulement si les fermés correspondant sont d'intersection non vide dans leur ensemble. Par compacité de l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{P}}$, c'est équivalent à ce que l'intersection d'un nombre fini de ces fermés soit non vide. . .

6. Théorème de Ramsey

1 C'est en quelques sorte une généralisation du principe des tiroirs. Soit en effet f une fonction de $[\mathbb{N}]^2$ dans $\{0, 1\}$.

On construit par récurrence une suite décroissante $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles de \mathbb{N} , une suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers et une fonction g de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\{0, 1\}$ de la façon suivante :

- $S_0 = \mathbb{N}$ et $x_0 = \min(S_0) = 0$.
- Supposons S_0, \dots, S_n construits, ainsi que $x_0 < \dots < x_n$.

On considère l'ensemble des couples d'entiers de la forme $\{x_n, y\}$, avec $y \in S_n \setminus \{x_n\}$.

Par la fonction f , ces couples sont envoyés sur 0 ou sur 1, il y en a donc une infinité envoyés sur 0 ou une infinité envoyés sur 1 (principe des tiroirs).

Dans le premier cas, on pose $g(x_n) = 0$ et

$$S_{n+1} = \{y \in S_n, f(\{x_n, y\}) = 0\}$$

Sinon, il y en a une infinité envoyés sur 1, et l'on pose $g(x_n) = 1$ et

$$S_{n+1} = \{y \in S_n, f(\{x_n, y\}) = 1\}$$

On a ainsi défini une fonction g d'un sous-ensemble infini de \mathbb{N} dans $\{0, 1\}$, ensemble à deux éléments. g est donc constante sur un ensemble infini A (principe des tiroirs). Nous allons voir que A répond au problème initial. Par commodité d'écriture, supposons que g vaut 0 sur A (cas 1 identique).

Soient x et y deux éléments de A , vérifiant $x < y$ (le cas contraire est là aussi identique). Soit n l'indice de x , c'est-à-dire l'entier tel que $x_n = x$. À l'étape n de la construction, on a "gardé" l'élément y dans l'ensemble S_{n+1} , c'est-à-dire que $f(\{x, y\}) = g(x) = 0$!

N.B. Le théorème se généralise dans plusieurs directions. D'abord, le résultat reste valable si l'on colorie en un nombre fini de couleurs (mais pas forcément seulement 2!)

Ensuite, une démonstration identique nous permettrait désormais de montrer la même chose pour les coloriage des ensembles de 3 entiers : on construit de la même façon une suite d'entiers sur laquelle la couleur d'un ensemble de trois éléments ne dépendra que des 2 premiers... On passe de la même façon à quatre éléments, etc. Pour une démonstration de tout ça, voir Graham, Rotschild & Spencer, *Ramsey Theory* (John Wiley & Sons, 1980).

- 2 Soit n_0 un entier désormais fixé. On associe une variable propositionnelle à chaque ensemble de deux entiers.

$$P = \{X_{n,m}, \{n, m\} \in [\mathbb{N}]^2\}$$

Une distribution de valeurs de vérités sur P correspond donc directement à un coloriage de $[\mathbb{N}]^2$ en deux couleurs, 0 et 1.

On cherche, pour tout entier N , un ensemble de formules qui soit satisfaisable si et seulement si il existe un coloriage de $[\mathbb{N}]^2$ en deux couleurs sans qu'il y ait de sous-ensemble A de \mathbb{N} de cardinal n_0 tel que le coloriage soit constant sur $[A]^2$.

Il suffit pour cela d'écrire toutes les conditions voulues ! On veut, pour toute partie A de \mathbb{N} à n_0 éléments, qu'au moins un couple d'élément de A soit de couleur 0, et un autre de couleur 1. On veut donc que soient vraies les formules :

$$\bigvee_{\{n,m\} \in [A]^2} X_{n,m} \quad \text{et} \quad \bigvee_{\{n,m\} \in [A]^2} \neg X_{n,m}$$

Si T est l'ensemble de toutes ces formules possibles lorsque A décrit les parties à n_0 éléments de \mathbb{N} , alors d'après la première question T est contradictoire. En effet une distribution de valeurs de vérités satisfaisant T définirait un coloriage de $[\mathbb{N}]^2$ sans sous-ensemble A de \mathbb{N} à n_0 éléments tel que le coloriage soit constant sur $[A]^2$. Ceci est absurde puisque qu'on a montré qu'il existe nécessairement une partie A infinie telle que le coloriage soit constant sur $[A]^2$. D'après le théorème de compacité, il existe donc une sous-partie finie T' de T contradictoire. Si N est un majorant de tous les entiers apparaissant en indice des variables présentes dans T' , alors N répond à la question posée : on ne peut pas trouver de coloriage de $[\mathbb{N}]^2$ sans qu'il y ait un sous-ensemble A à n_0 éléments tel que le coloriage soit constant sur $[A]^2$.

N.B. On peut par ailleurs montrer directement cette version finie, par des méthodes purement combinatoire. Voir par exemple le texte intitulé “Jeux sur les graphes et théorème de Ramsey”, disponible à l’adresse suivante : <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>