TD 14 : quelques corrections

23/01/04

3. Cofinalité

3 Soit α un ordinal. Montrons que $\mathrm{cof}\,(\alpha)$ est un cardinal. Si ce n'est pas le cas, soit $\beta < \mathrm{cof}\,(\alpha)$ et f une bijection de β sur $\mathrm{cof}\,(\alpha)$. Soit enfin f_0 une fonction strictement croissante non majorée de $\mathrm{cof}\,(\alpha)$ dans α. Alors $f_0 \circ f$ est à valeur dans α, non majorée.

On définit $g : \beta \to \alpha$ par $g(x) = \sup\limits_{y \leq x} f_0 \circ f(y)$. Ainsi g est croissante et non majorée (un majorant de g serait majorant de $f_0 \circ f$, c'est-à-dire de f_0).

Soit A l'image de β par g. On définit un pseudo inverse $\tilde{g}$ de A dans β par $\tilde{g}\,(x) = \min\{y \in \beta, g(y) = x\}$. Soit enfin B l'image de A par $\tilde{g}$.

Alors la restriction de g à B définit une application de B dans A croissante et injective, donc strictement croissante. Et son image est la même que celle de g. C'est donc une application de B dans α strictement croissante et non majorée.

Enfin, B est une partie de β, donc un ensemble bien ordonné, isomorphe en tant qu'ensemble ordonné à un ordinal $\gamma \leq \beta$ (cette propriété est une propriété ordinale, qui se montre par induction ordinale...).

Soit alors h un isomorphisme d'ensemble bien ordonné de γ dans B (c'est-à-dire une bijection croissante). Alors on vérifie sans peine que $g \circ h$ est une application strictement croissante non majorée de γ dans α.

Ainsi α est cofinal à γ, avec $\gamma \leq \beta < \mathrm{cof}\,(\alpha)$, ce qui contredit la définition de $\mathrm{cof}\,(\alpha)$.

Conclusion : $\mathrm{cof}\,(\alpha)$ ne peut être équipotent à un ordinal strictement plus petit. C'est donc un cardinal !

4. Hypothèse du continu

1 Soit f une application surjective de l'union disjointe des $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ dans le produit des $(b_i)_{i \in \mathrm{I}}$, si elle existe.

Pour $i \in \mathrm{I}$, on appelle f_i la composée de l'injection canonique de a_i dans l'union, de f, et de la projection sur la i-ème composante.

Comme par hypothèse b_i est de cardinal supérieur à a_i, f_i ne peut être surjective. Donc $b_i \setminus \mathrm{Im} f_i$ est non vide. On utilise la forme suivante de l'axiome du choix : "un produit d'ensemble non vide est non vide" pour trouver un élément y de $\prod\limits_{i \in \mathrm{I}} b_i \setminus \mathrm{Im} f_i$.

On a supposé f surjective, soit donc x un antécédant de y, et i tel que $x \in a_i$. Alors $f_i(x)$ est par construction la i-ème composante de y, donc dans $b_i \setminus \mathrm{Im} f_i$, ce qui est absurde.

Donc il n'y a pas de surjection de l'union disjointe des $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ dans le produit des $(b_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

2 On a une suite croissante d'ordinaux $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\rho}$ non majorée dans κ. On pose pour tout $\gamma < \rho$:

$$\kappa_\gamma = \overline{\overline{\alpha_\gamma}}$$

Alors on peut construire une injection f de κ dans l'union disjointe des κ_γ de la façon suivante :

Pour un ordinal $\alpha \in \kappa$, on définit $\gamma \in \rho$ le plus petit ordinal tel que $\alpha \in \alpha_\gamma$. Si f_γ désigne une bijection de α_γ sur son cardinal κ_γ, alors on pose $f(\alpha) = f_\gamma(\alpha)$.

L'injectivité de f est immédiate, et donc $\kappa \leq \sum\limits_{\gamma<\rho} \kappa_\gamma$, où les κ_γ sont tous strictement plus petits que κ.

N.B. Pour construire f, on a besoin de considérer simultannément toutes les bijections $(f_\gamma)_{\gamma<\rho}$. C'est là qu'intervient l'axiome du choix !

Pour l'inégalité inverse, on remarque que l'union disjointe des κ_γ pour $\gamma < \rho$ s'injecte naturellement dans une union disjointe de ρ copies de κ, puisque chaque κ_γ est strictement inférieur à κ. C'est-à-dire que notre union disjointe s'injecte dans $\kappa \times \rho$, donc dans $\kappa \times \kappa$, puisque ρ, la cofinalité de κ, est nécessairement inférieure où égale à κ.

Or on a déjà vu (cf TD 13) que $\kappa \times \kappa$ est de cardinal κ. Donc l'union disjointe κ_γ pour $\gamma < \rho$ s'injecte dans κ, et l'on a $\sum\limits_{\gamma<\rho} \kappa_\gamma \leq \kappa$.

3 Supposons $\mathrm{cof}\,(2^\kappa) \leq \kappa$. D'après la question précédente, on pourrait écrire 2^κ sous la forme d'une somme $\sum\limits_{\gamma<\kappa} \kappa_\gamma$, où les κ_γ sont des cardinaux strictement inférieurs à 2^κ.

Mais d'après le lemme de König, on a alors l'inégalité cardinale :

$$\sum_{\gamma<\kappa} \kappa_\gamma < \prod_{\gamma<\kappa} 2^\kappa = (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$$

D'où une contradiction…

4 On ne peut pas avoir, par exemple, $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$, puisque $\aleph_\omega$ est de cofinalité $\aleph_0$…