TD 12 : quelques corrections

11/01/04

1. Somme ordinale

5 L'unicité découle du fait que, pour α un ordinal fixé, les trois conditions :

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 = \alpha \\
&\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta) \quad (s \text{ désigne la fonction successeur.}) \\
&\alpha + \sup_{\gamma<\beta} \gamma = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma) \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite.}
\end{aligned}$$

définissent une unique fonction de β par induction ordinale. Il s'agit juste de montrer que c'est bien la somme ordinale de α et β. On montre bien sûr ceci par induction ordinale (!) (α est fixé).

- $\alpha + 0 = \alpha$ (en effet on construit une bijection croissante de $\alpha \times \{0\} \cup 0 \times \{1\}$ sur α.), donc α est l'ordinal du bon ordre $\alpha \times \{0\} \cup 0 \times \{1\}$, c'est-à-dire $\alpha + 0 = \alpha$.
- $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$: là aussi, on construit sans problème une bijection de $\alpha \times \{0\} \cup (\beta \times \{0\} \cup 1 \times \{1\}) \times \{1\}$ sur $(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}) \cup 1 \times \{1\}$. On en déduit l'égalité ordinale.
- Pour ce qui est du cas β limite, c'est un peu plus compliqué. Tout d'abord, on a pour tout $\gamma < \beta$ l'inégalité :

  $$\alpha + \gamma \leq \alpha + \beta$$

  et donc
  $$\sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma) \leq \alpha + \sup_{\gamma<\beta} \gamma$$

  Ensuite, on va définir une injection croissante du bon ordre $\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$ dans l'ordinal $\sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$.
  Pour cela, il suffit d'envoyer les éléments $(x, 0)$ de $\alpha \times \{0\}$ sur les éléments x correspondant, et les éléments $(x, 1)$ de $\beta \times \{1\}$ sur les $\alpha + x$. La régularité à gauche de l'addition permet d'assurer l'injectivité de cette application, la croissance étant immédiate.
  Si l'on compose cette application avec la bijection de $\alpha + \beta$ sur le bon ordre $\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$, on obtient une application strictement croissante de $\alpha + \beta$ dans $\sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$, et donc on a (cf TD 11) :

  $$\alpha + \beta \leq \sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$$

  D'où l'égalité.

2. Axiome de l'infini

1 Soit $\mathrm{O}n(x)$ la formule à une variable libre qui définit la classe des ordinaux. (Pour l'écrire, il suffit d'écrire la conjonction des formules qui exprime le fait que l'appartenance est un ordre total strict sur x qui est un bon ordre, et celle qui exprime que x est transitif...)

L'énoncé "α est un ordinal fini" s'exprime alors par la formule :

$$\mathrm{O}n(\alpha) \wedge (\forall \beta \in \alpha \, (\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists \gamma \, (\beta = \gamma \cup \{\gamma\})))$$

2 L'une des implication est triviale : s'il existe un ordinal infini α, on définit aisément une injection de α dans une de ses parties propres : il suffit d'envoyer chaque ordinal fini sur son successeur (et les autres éléments de α sur eux-mêmes).

Réciproquement, soit a un ensemble et f une injection de a dans une de ses parties propres. On va définir une injection de l' "ensemble" des ordinaux finis dans a (on ne sait pas encore que c'est un ensemble).

On prend x_0 un élément de $a \setminus \mathrm{Im}(f)$, et l'on définit par x_n récurrence sur n en posant $x_{n+1} = f(x_n)$. Il est immédiat que cette suite est injective.

S'il n'existe pas d'ordinal limite, on ainsi défini une relation fonctionnelle F injective sur la classe $\mathrm{O}n$, par :

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & \longmapsto & x_0 \\ \alpha + 1 & \longmapsto & f(x_\alpha) \end{array} \right.$$

L'ensemble $\{x_\alpha, \mathrm{O}n(\alpha)\}$ est bien un ensemble : il est obtenu à partir de a par le schéma de compréhension, grâce à la formule $\exists x \mathrm{O}n(x) \wedge y = \mathrm{F}(x)$. Mais alors, la classe des ordinaux serait un ensemble, par le schéma de substitution appliqué à a, et grâce à la formule $\mathrm{O}n(x) \wedge \exists y \in a(y = \mathrm{F}(x))$.

3. Axiome du choix

On va montrer l'équivalence entre les 3 formes suivantes de l'axiome du choix :

- (AC) Pour tout ensemble a dont les éléments sont non-vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble b dont l'intersection avec chacun des éléments de a est un singleton.
- (AC') Pour tout ensemble a, il existe au moins une fonction de choix sur a.
- (AC") Si $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille d'ensembles non vides, alors le produit $\prod_{i \in \mathrm{I}} a_i$ est non vide.

$\boxed{\text{(AC)} \Rightarrow \text{(AC")}}$ Soit $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'ensembles non vides. Soit $b_i = a_i \times \{i\}$. L'ensemble $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \{b_i\}$ a ses éléments b_i deux à deux disjoints. Soit c un ensemble tel que $c \cap b_i$ a un unique élément pour tout i (par (AC)).

Alors $c \cap \bigcup_{i \in \mathrm{I}} b_i$ n'est rien d'autre qu'un élément du produit $\prod_{i \in \mathrm{I}} a_i$, qui est donc non vide.

$\boxed{\text{(AC")} \Rightarrow \text{(AC')}}$ Soit a un ensemble, et b le produit $\prod_{x \in \mathcal{P}(a) \text{ non vide}} x$. Par (AC"), ce produit est non vide. Soit donc f un élément de ce produit. Si x est une partie non vide de a, la x-ième composante de f est donc un élément de x. C'est-à-dire que f définit une fonction de choix sur x.

$\boxed{\text{(AC')} \Rightarrow \text{(AC)}}$ Soit a un ensemble dont les éléments sont deux à deux disjoints et non vides, et $b = \cup a$ (axiome de l'union appliqué à a. Appliquons (AC') à l'ensemble b : soit f une fonction de choix sur b. Chaque élément x de a est une partie non vide de b. L'ensemble $\{f(x), x \in a\}$ obtenu par le schéma de remplacement à partir de l'ensemble a, possède la propriété voulue : il a un et un seul élément en commun avec chaque élément de a.

L'équivalence avec le dernier énoncé se montre par :

- Si l'on a (AC), et une application surjective g de x dans y. Soit z l'ensemble obtenu par remplacement à partir de y par la fonctionnelle $t \subset x \wedge (\forall u \in x u \in t \Leftrightarrow (u, v) \in g)$. Les élément de z sont les images réciproques par g des éléments de y : il sont non vides (g surjective) et deux à deux disjoints (g est une application). Par (AC), on trouve un ensemble qui contient un élément de chacun de ces éléments. On construit alors sans problème la fonction h.
- Réciproquement, si l'on a toujours une telle fonction h, soit a un ensemble dont les éléments sont deux à deux disjoints, et non vides. Soit $b = \cup a$. On définit une fonction surjective g de b dans a qui à tout élément x de b associe l'unique élément y de a tel que $x \in y$ (cette fonction est obtenue par compréhension à partir de $b \times a$ par la formule $(x, y) \in b \times a \wedge x \in y$!) Si h est une fonction telle que $g \circ h$ soit l'identité, alors l'image de h est un ensemble dont l'intersection avec chaque élément de a est réduit à un singleton.