TD 11 : correction de 4. (finitude de Dedekind)

1. Un ensemble fini A est en bijection avec un ordinal fini α. Or un ordinal fini α ne peut être en bijection avec une de ses parties propres (même démonstration que pour les entiers naturels). Donc A est D-fini, sinon une bijection de A sur une de ses parties propre induirait par conjugaison une bijection de α sur une de ses parties propres.

Modulo l'axiome du choix, tout ensemble est en bijection avec un ordinal. Celui-ci est nécessairement infini si l'ensemble de départ est D-infini. D'où la réciproque.

2. Bien sûr, si ω s'injecte dans un ensemble A, alors A est D-infini. En effet, si f désigne l'injection de ω dans A, on défini sur A la fonction g par $f(n) \longmapsto f(n+1)$ et $x \longmapsto x$ si $x \notin \mathrm{I}m(f)$.

Réciproquement, si A s'injecte dans une partie propre A', il suffit de considérer un élément $x \notin \mathrm{A}'$. Les itérés de x par l'injection de A dans A' définissent alors une injection de ω dans A.

3. Une union d'ensembles D-finis ne peut contenir de partie dénombrable : l'un des deux contiendrait nécessairement un sous-ensemble infini de cette partie. Idem pour un produit, en considérant les sections selon la première composante du produit d'une injection de ω dans le produit. Celles-ci ne peuvent être qu'en nombre fini, et chacune doit être finie puisque la deuxième composante du produit doit aussi être D-finie.

4. Soit I un ensemble D-fini et $(\mathrm{E}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'ensembles D-finis. Supposons que $\bigcup\limits_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ est D-infinie, et soit f une injection de ω dans $\bigcup\limits_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$. On considère l'ensemble $\mathrm{I}_0 = \{i \in \mathrm{I}, \exists n \in \omega, f(n) \in \mathrm{E}_i\}$ et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{I}_0 \to \omega \\ \quad i \mapsto \min\,(n, f(n) \in \mathrm{E}_i) \end{array} \right.$$

Alors $\varphi(\mathrm{I}_0)$ est une partie de ω, bien ordonnée par restriction, donc isomorphe à un ordinal κ. Cet ordinal ne peut être supérieur ou égal à ω, sinon la bijection réciproque induirait une injection de ω dans I, ce qui contredit le caractère D-fini de I. Donc κ est fini, et I_0 est donc fini.

Enfin, nécessairement $f(\omega) \cap \mathrm{E}_i$ doit être fini (pour les mêmes raisons) quel que soit l'ensemble E_i. Ainsi $f(\omega)$ est une union finie d'ensembles finis, ce qui est absurde. Donc $\bigcup\limits_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ est D-finie.

5. Pour tout ordinal fini n, définissons $\mathrm{A}_n = \{a \subset x, a \text{ équipotent à } n\}$. ($\mathrm{A}_n \in \mathcal{P}\left(\mathcal{P}(x)\right)$.) Alors l'application $n \longmapsto \mathrm{A}_n$ est une injection de ω dans $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(x)\right)$, qui est donc D-infini.

N.B. On ne peut pas faire la même chose dans $\mathcal{P}(x)$, en effet il faudrait "choisir" une partie à n éléments dans x, ce simultannément pour chaque entier n, ce qui nécessite l'axiome du choix (dénombrable). Ici en revanche, A_n s'obtient à partir de $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(x)\right)$ par le schéma de compréhension.