

# Calcul des prédicats - Théorie des modèles

(Notes complémentaires 2)

Résumé des premières définitions et résultats vus en cours.

On ne considère que des langages égalitaires, et on s'autorise à écrire  $=$  à la fois pour le symbole du langage  $R_=_$  et pour son interprétation dans une structure.

## 1 Morphismes - Extensions élémentaires

### 1.1 Premières définitions et rappels

Soient  $\mathcal{L}$  un langage,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{L}$ -structures et  $h$  une application de  $M$  dans  $N$ . L'application  $h$  est un  **$\mathcal{L}$ -homomorphisme** de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  si  $h$  vérifie:

- (1) pour tout symbole  $c$  de constante de  $\mathcal{L}$ ,  $h(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ ,
- (2) pour tout symbole  $f$  de fonction de  $\mathcal{L}$ , d'arité  $k$ , pour tout  $(m_1, \dots, m_k) \in M^k$ ,  $h(f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k)) = f^{\mathcal{N}}(h(m_1), \dots, h(m_k))$ .
- (3) pour tout symbole  $R$  de relation de  $\mathcal{L}$ , d'arité  $k$ , pour tout  $(m_1, \dots, m_k) \in M^k$ , si  $(m_1, \dots, m_k) \in R^{\mathcal{M}}$ , alors  $(h(m_1), \dots, h(m_k)) \in R^{\mathcal{N}}$ .

L'application  $h$  est un  **$\mathcal{L}$ -plongement** de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  si  $h$  est un  $\mathcal{L}$ -homomorphisme et satisfait en plus que pour tout symbole  $R$  de relation de  $\mathcal{L}$ , d'arité  $k$ , pour tout  $(m_1, \dots, m_k) \in M^k$ ,  $(m_1, \dots, m_k) \in R^{\mathcal{M}}$ , **si et seulement si**  $(h(m_1), \dots, h(m_k)) \in R^{\mathcal{N}}$ .

**Proposition 1** Soit  $h$  un  $\mathcal{L}$ -plongement de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ .

- (i)  $h$  est injectif.
- (ii) Pour toute formule  $\phi(v_0, \dots, v_n)$  de  $\mathcal{L}$ , **sans quantificateurs**, pour tout  $(m_0, \dots, m_n) \in M^{n+1}$ ,  $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \dots, m_n)$  ssi  $\mathcal{N} \models \phi(h(m_0), \dots, h(m_n))$ .

Remarque: un  $\mathcal{L}$ -homomorphisme injectif n'est pas forcément un  $\mathcal{L}$ -plongement. C'est le cas si le langage  $\mathcal{L}$  ne comprend pas de symbole de relation autre que l'égalité, mais si on considère le langage  $\mathcal{L}$  d'une relation binaire, et les deux  $\mathcal{L}$ -structures  $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{Z}, \equiv_6 \rangle$  et  $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{Z}, \equiv_3 \rangle$ , où  $\equiv_n$  est la congruence modulo  $n$ , alors l'identité est un  $\mathcal{L}$ -homomorphisme bijectif de  $\mathcal{M}_1$  dans  $\mathcal{M}_2$  mais n'est pas un  $\mathcal{L}$ -plongement.

**Définition** L'application  $h$  est un  **$\mathcal{L}$ -plongement élémentaire** si pour toute formule  $\psi(v_0, \dots, v_n)$  de  $\mathcal{L}$ , et pour tout  $(m_0, \dots, m_n) \in M^{n+1}$ ,

$$\mathcal{M} \models \psi(m_0, \dots, m_n) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \psi(h(m_0), \dots, h(m_n)).$$

On écrit  $\mathcal{M} \preceq_{\mathcal{L}} \mathcal{N} \text{ mod.}$

**Exemple:** Considérons les deux structures  $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq \rangle$  et  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$  dans le langage  $\mathcal{L}$  avec un symbole de relation binaire.

L'identité  $i : \mathbb{N} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{N}$  est un  $\mathcal{L}$ -plongement mais n'est pas un  $\mathcal{L}$ -plongement élémentaire: en effet les conditions de la définition d'un  $\mathcal{L}$ -plongement sont satisfaites, il faut et il suffit que  $i$  préserve l'égalité et la relation d'ordre. Mais si on considère la formule  $\psi(v) = \forall w v \leq w$ , on a:

$$\mathcal{M} \models \psi(1) \text{ mais } \mathcal{N} \models \neg\psi(1).$$

En revanche si on considère  $h : \mathbb{N} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{N}$ , définie par  $h(n) = n - 1$ , alors pour la formule  $\psi(v)$  donnée au-dessus on a bien que:

$$\mathcal{M} \models \psi(1) \text{ et } \mathcal{N} \models \psi(h(1)).$$

En fait ce deuxième plongement  $h$  est, lui, élémentaire, comme le dit la proposition suivante:

**Proposition 2** *Soit  $h$  un  $\mathcal{L}$ -plongement de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  qui est surjectif, alors  $h$  est un plongement élémentaire.*

**Définition:** Un  $\mathcal{L}$ -plongement surjectif est appelé un  **$\mathcal{L}$ -isomorphisme**. Un  $\mathcal{L}$ -isomorphisme de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}$  est appelé un  **$\mathcal{L}$ -automorphisme** de  $\mathcal{M}$ .

On rappelle que si  $M \subset N$ ,  $\mathcal{M}$  est une  $\mathcal{L}$ -sous-structure de  $\mathcal{N}$  ssi l'inclusion est un  $\mathcal{L}$ -plongement, noté  $\mathcal{M} \subset_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$ .

On dit que  $\mathcal{M}$  est une **sous-structure élémentaire** de  $\mathcal{N}$  (ou que  $\mathcal{N}$  est une **extension élémentaire** de  $\mathcal{M}$ ) si l'inclusion est un  $\mathcal{L}$ -plongement élémentaire (noté  $\mathcal{M} <_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$ ).

## 1.2 Critère de Tarski-Vaught

**Proposition 3** (Critère de Tarski-Vaught) *Soit  $\mathcal{M}$  une  $\mathcal{L}$ -sous-structure de  $\mathcal{N}$ . Alors  $\mathcal{M}$  est une sous-structure élémentaire de  $\mathcal{N}$  si et seulement si, pour tout  $n \geq 0$ , pour toute formule  $\phi(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n)$  de  $\mathcal{L}$ , pour tous  $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$ ,*

$$\text{si } \mathcal{N} \models \exists v_n \phi(a_0, \dots, a_{n-1}, v_n), \text{ alors il existe } b \in M \text{ tel que } \mathcal{N} \models \phi(a_0, \dots, a_{n-1}, b).$$

On a en fait un petit peu plus fort, et c'est souvent sous cette deuxième forme que l'on va utiliser le critère:

**Corollaire 4** (Tarski-Vaught bis) *Soit  $\mathcal{N}$  une  $\mathcal{L}$ -structure et  $A \subset N$  tel que pour toute formule  $\phi(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n)$  de  $\mathcal{L}$ , pour tous  $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ ,*

$$\text{si } \mathcal{N} \models \exists v_n \phi(a_0, \dots, a_{n-1}, v_n), \text{ alors il existe } b \in A \text{ tel que } \mathcal{N} \models \phi(a_0, \dots, a_{n-1}, b),$$

*alors,  $A$  est l'ensemble de base d'une  $\mathcal{L}$ -sous-structure élémentaire de  $\mathcal{N}$ .*

*Démonstration :* Il suffit de vérifier que  $A$  est l'ensemble de base d'une  $\mathcal{L}$ -sous-structure, c'est-à-dire que  $A$  contient les interprétations des constantes dans  $\mathcal{N}$  et est clos pour les fonctions de  $\mathcal{L}$ .

Soit  $c$  un symbole de constante, et  $\phi(v_0)$  la formule  $v_0 = c$ . Alors  $\mathcal{N} \models \exists v_0 \phi(v_0)$ . Par la propriété de  $A$ , on doit donc avoir qu'il existe  $a \in A$  tel que  $\mathcal{N} \models \phi(a)$ , c'est-à-dire, que dans  $N$ , on a  $a = c^{\mathcal{N}}$ .

Maintenant si  $f$  est un symbole de fonction d'arité  $k$ , soient  $a_1, \dots, a_k \in A$ . Soit  $\psi(v_1, \dots, v_k, w)$  la formule  $f(v_1, \dots, v_k) = w$ . Alors  $\mathcal{N} \models \exists w \psi(a_1, \dots, a_k, w)$ . Par hypothèse il doit donc exister  $b \in A$  tel que  $\mathcal{N} \models \psi(a_1, \dots, a_k, b)$ , c'est-à-dire  $f^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_k) = b$ .  $\square$

## 2 Élémentaire équivalence - Théories complètes

*Attention: la définitions de "théorie" que j'ai choisie de donner cette année n'est pas la plus communément admise. On peut trouver dans les ouvrages de logique deux variantes: soit une théorie est simplement un ensemble d'énoncés, soit parfois c'est un ensemble d'énoncés qui est clos pour la déduction sémantique.*

**Définition: 1.** Un ensemble d'énoncés de  $\mathcal{L}$  (= formules sans variables libres) est **consistant** ou **satisfaisable** si il a un modèle. Sinon on dit qu'il est **inconsistant** .

**2.** Une **théorie** de  $\mathcal{L}$  est un ensemble d'énoncés consistant.

Si  $T$  est une théorie de  $\mathcal{L}$ , on note  $Cons(T)$ , l'ensemble des conséquences de  $T$ , l'ensemble des énoncés  $\sigma$  de  $\mathcal{L}$  tels que  $T \vdash \sigma$ .

**Définition:** Soient  $\mathcal{L}$  un langage,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{L}$ -structures. On dit que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont **élémentairement équivalents**, noté  $\mathcal{M} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$ , si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  satisfont exactement les mêmes énoncés (= formules sans variables libres) de  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire si, pour tout énoncé  $\sigma$  de  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{M} \models \sigma \text{ si et seulement si } \mathcal{N} \models \sigma.$$

En particulier, si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont  $\mathcal{L}$ -isomorphes, alors  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont élémentairement équivalents. Plus généralement s'il existe un  $\mathcal{L}$ -plongement élémentaire de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ , alors  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont élémentairement équivalents.

Comme on le verra un peu plus loin, dès que  $\mathcal{M}$  est infinie, il existe  $\mathcal{N}$  qui lui est élémentairement équivalente mais qui ne lui est pas isomorphe. Ce n'est en revanche pas le cas pour les structures finies :

**Proposition 5** (*Exercice - voir TD*) *Soit  $\mathcal{L}$  un langage fini,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{L}$ -structures élémentairement équivalentes. Si  $M$ , l'ensemble de base de  $\mathcal{M}$  est fini, alors  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont  $\mathcal{L}$ -isomorphes.*

**Définition:** Soient  $\mathcal{L}$  un langage et  $T$  une théorie de  $\mathcal{L}$ . On dit que la théorie  $T$  est **complète** si, pour tous modèles  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  de  $T$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont élémentairement équivalents.

**Proposition 6** (*Exercice*) Soit  $T$  une théorie de  $\mathcal{L}$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes:

1.  $T$  est complète,
2. pour tout énoncé  $\sigma$  de  $\mathcal{L}$ ,  $T \vdash \sigma$  si et seulement si il existe un modèle de  $T$  qui satisfait  $\sigma$ ,
3. pour tout énoncé  $\sigma$  de  $\mathcal{L}$ ,  $T \vdash \sigma$  ou bien  $T \vdash \neg\sigma$ .

Si  $\mathcal{M}$  est une  $\mathcal{L}$ -structure, alors la théorie suivante, appelée **Théorie de la structure**  $\mathcal{M}$  est complète:

$$Th(\mathcal{M}) = \{\sigma; \sigma \text{ énoncé de } \mathcal{L} \text{ tel que } \mathcal{M} \models \sigma\}.$$

### 3 Premiers théorèmes de Löwenheim-Skolem et applications

On rappelle que la cardinalité d'un langage  $\mathcal{L}$ , notée  $||\mathcal{L}||$  est la cardinalité de l'ensemble des formules du langage  $\mathcal{L}$ , et est donc égale à  $\sup(\aleph_0, |\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}|)$ .

On appellera cardinalité de la  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathcal{M}$ , et on notera  $|\mathcal{M}|$ , la cardinalité de l'ensemble de base,  $M$ , de la structure  $\mathcal{M}$ .

Voici une première application directe du critère de Tarski-Vaught:

**Proposition 7** (Löwenheim-Skolem descendant) Soient  $\mathcal{L}$  un langage,  $\mathcal{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure infinie et  $X$  un sous-ensemble de  $M$ . Il existe  $\mathcal{N} = \langle N, \dots \rangle$ , sous-structure élémentaire de  $\mathcal{M}$ , telle que :

- $X \subseteq N$
- $N$  est de cardinalité inférieure ou égale au sup de la cardinalité de  $X$  et de  $||\mathcal{L}||$ .

Preuve (donnée en cours): on construit  $\mathcal{N}$  "à la main" et on utilise le critère de Tarski-Vaught (Corollaire .4) pour montrer que  $\mathcal{N}$  est bien une sous-structure élémentaire de  $\mathcal{M}$ .

**Corollaire 8** (i) Si  $T$  est une théorie dans un langage dénombrable, alors  $T$  a un modèle dénombrable.

(ii) Soit  $\mathcal{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure de cardinalité supérieure ou égale à  $||\mathcal{L}||$ . Alors pour chaque cardinalité  $\beta$ ,  $||\mathcal{L}|| \leq \beta \leq |\mathcal{M}|$ ,  $\mathcal{M}$  a une  $\mathcal{L}$ -sous-structure élémentaire de cardinalité égale à  $\beta$ .

**Applications:**

**Corollaire 9** Soit  $\mathcal{L}$  un langage dénombrable et  $T$  une théorie de  $\mathcal{L}$  dont tous les modèles dénombrables sont infinis et  $\mathcal{L}$ -isomorphes. Alors la théorie  $T$  est complète.

On a vu qu'on peut ainsi montrer que les théories suivantes sont complètes:

– dans le langage  $\mathcal{L}_\theta$ , réduit à l'égalité, la théorie  $T_0 = \{\theta_n; n \geq 1\}$  où

$$\theta_n = \exists v_0 \dots \exists v_n (\bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} v_i \neq v_j).$$

– dans le langage  $\mathcal{L} = \{R\}$ , où  $R$  est un symbole de relation binaire, la théorie des ordres denses sans extrémités.