Problème 2

La Logique Linéaire Soft multiplicative, qu'on notera SLL, est définie par les règles suivantes (en calcul des séquents monolatère) :
pour l'axiome, la coupure, les connecteurs $\otimes$, Γ : mêmes règles que pour MLL (voir l'annexe) ;
pour les exponentielles :

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ \textit{promf} \qquad\qquad \frac{\vdash A, \ldots, A, \Gamma}{\vdash ?A, \Gamma}\ \textit{mplex}$$

Ces règles sont appelées respectivement *promotion fonctorielle* et *multiplexing*.
Dans la règle (mplex) le nombre de formules A dans le séquent prémisse est n'importe quel $n \geq 0$. Ce n est appelé l'*arité* de l'occurrence de la règle (mplex).

1. On considère pour cette question la règle supplémentaire suivante :

$$\frac{\vdash \Gamma, ??A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \textit{digging}$$

   Montrer que si un séquent $\vdash \Gamma$ est prouvable dans MELL, alors il est prouvable dans le système (SLL+digging).

2. On définit les structures de preuve SLL comme les structures de preuve MELL, sauf pour les noeuds exponentiels et les boîtes :
   – un noeud multiplexing $?m$ a $n \geq 0$ prémisses (n est son *arité*) d'étiquettes A et une conclusion d'étiquette $?A$,
   – une boîte exponentielle a une porte principale (avec un noeud !) et $k \geq 0$ portes auxilliaires avec des noeuds ? ; si les conclusions de la structure de preuve R à l'intérieur de la boîte sont $A_1, \ldots A_k, B$, les conclusions des portes auxilliaires sont étiquetées par $?A_1, \ldots, ?A_k$ et celle de la porte principale par $!B$.

   Les boîtes doivent satisfaire les mêmes conditions que pour les structures de preuve MELL : chaque noeud ! ou ? est porte d'une boîte, et étant données 2 boîtes, soit elles sont disjointes soit l'une est incluse dans l'autre.

   La profondeur d'un noeud d'une structure de preuve R est le nombre de boîtes dans lesquelles il se trouve ; la profondeur de R est le maximum des profondeurs de ses noeuds. Le rang de R est le maximum des arités de ses noeuds $?m$.

   Donner les règles de réduction exponentielles des structures de preuve SLL. Si R se réduit en R', que peut-on dire sur la profondeur de R' ? Sur son rang ?

3. Donner une traduction, qu'on notera $(.)^s$, des structures de preuve SLL dans les structures de preuve MELL telle que R et R^s aient mêmes conclusions.

4. Donner une notion de graphe de correction et un critère de correction (c) pour les structures de preuve SLL (définissant des *réseaux* SLL) tels que :

   si R est une structure de preuve SLL satisfaisant (c), alors R^s satisfait le critère (AC).

   (Indication : faire une preuve directe, ne pas essayer d'utiliser de propriété de séquentialisabilité)

5. *(question subsidiaire)*
   Dans cette question on va montrer que la réduction des réseaux SLL a un nombre d'étapes polynomial.

Soit R un réseau SLL ; soient $R_1, \ldots, R_k$ ($k \geq 0$) les sous-réseaux de R contenus dans une boîte exponentielle à profondeur 0. Soit N le nombre de noeuds de R non coupures et à profondeur 0. Le *poids* de R est le polynôme $W_R[X]$ défini de manière inductive par :

$$W_R = N + \sum_{i=1}^{k} X W_{R_i}.$$

(a) Montrer que si n est un entier strictement positif et si R se réduit en R' par une étape non exponentielle, alors $W_{R'}(n) < W_R(n)$.

(b) Montrer que si n est un entier strictement positif et supérieur ou égal au rang de R et R se réduit en R' alors $W_{R'}(n) < W_R(n)$. En déduire que le nombre d'étapes de réduction d'un réseau R est majoré par $W_R(r)$, où r est le rang de R.