

Lambda-calcul simplement typé

Pierre Lescanne

28 novembre 2005 – 19:32

Le paradoxe du barbier

$\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ et $Y \equiv \lambda f.(\lambda x f(xx)) (\lambda x f(xx))$
contiennent des termes qui s'appliquent à eux-mêmes.

Le **paradoxe du barbier** est :

*Le barbier rase tous ceux qui ne se rasent
pas eux-mêmes.*

Qui rase le barbier ?

Pour éviter les paradoxes, on cherche à éviter de tels termes.

On va donc **typer** les termes.

Typer est aussi bien pour la programmation.

Le typage a donc deux objectifs :

- ▶ préserver la correction, **rien de mauvais ne peut arriver**,
- ▶ préserver la terminaison, **toutes les réductions se terminent**.

En λ -calcul la **terminaison** s'appelle la **normalisation forte**.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre démonstration de la normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Types, annotations des variables

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les **types** sont

- ▶ soit des types de base o ,
- ▶ soit des types applications $\sigma \rightarrow \tau$.

Dans l'approche dite **à la Church**, les variables associées à un λ sont annotées par un type.

$$M, N ::= x \mid \lambda x^\sigma. M \mid M N$$

Soit Γ un ensemble de variables annotées par leurs types.

$$\Gamma = \{x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}\}.$$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Un jugement de typage à la Church est une déclaration de la forme $\Gamma \vdash M : \sigma$.

On a alors les règles de typage suivante.

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \sigma \quad \text{si } x^\sigma \in \Gamma} \qquad \frac{\Gamma \cup \{x^\sigma\} \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^\sigma. M : \sigma \rightarrow \tau.}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau}$$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

A la Church on écrirait :

$$(\lambda f^{(o \rightarrow o) \rightarrow (o \rightarrow o)} x^{o \rightarrow o}. f(fx)) (\lambda f^{o \rightarrow o} x^o. f(fx))$$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre démonstration de la normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Dans l'approche **à la Curry**, on traite des termes usuels du lambda-calcul.

Il faut typer les variables libres, il faut donc faire des **hypothèses sur les types** de ces variables.

D'où la notion d'**environnement**.

Un environnement est un ensemble d'association de types à des variables.

$$\Gamma \equiv x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n$$

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

[Normalisation forte](#)

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

Un **jugement** est l'affirmation du type σ d'un terme M
sous un certain environnement Γ :

$$\Gamma \vdash M : \sigma$$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

$$\text{(Var)} \quad \Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$$

$$\text{(Abs)} \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau}$$

$$\text{(App)} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

Typez les termes

$B \equiv \lambda xyz.x(yz),$

$I \equiv \lambda x.x,$

$C \equiv \lambda xyz.xzy,$

$K \equiv \lambda xy.x,$

$S \equiv \lambda xyz.xz(yz),$

p 2 2 $\equiv (\lambda mn.m n) (\lambda fx.f(fx)) (\lambda fx.f(fx))$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

1. Typez $// \equiv (\lambda x.x)(\lambda x.x)$.
2. Typez $\mathbf{2} \mathbf{2} \equiv (\lambda fx.f(fx))(\lambda fx.f(fx))$.
3. A-t-on le même type pour $/$ (resp. $\mathbf{2}$) dans chaque cas ?

Conclusion : Le système de **types simples** n'est pas assez général. Il ne permet pas d'affecter un type unique à chaque terme.

Le type d'un même terme peut dépendre de son contexte.

Si $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ alors
 $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$

Démonstration : Par induction sur M .

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Si $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ alors $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$

Démonstration : Par induction sur M .

- Si $M \equiv y$ alors Γ contient $y : \tau$ et $M[x := N] \equiv M \equiv y$ donc le résultat qui est $\Gamma \vdash y : \tau$ est clair.
- Si $M \equiv x$ alors $\tau = \sigma$ et $M[x := N] \equiv N$ et le résultat est l'une des hypothèses.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Si $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ alors $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$

Démonstration : Par induction sur M .

- Si $M \equiv P Q$ alors par (App) pour un certain τ' , on a
 - ▶ $\Gamma, x : \sigma \vdash P : \tau' \rightarrow \tau$ duquel on tire par induction
 $\Gamma \vdash P[x := N] : \tau' \rightarrow \tau$
 - ▶ et $\Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau'$ duquel on tire par induction
 $\Gamma \vdash Q[x := N] : \tau'$.

Donc par (App) $\Gamma \vdash (P Q)[x := N] : \tau$ puisque
 $(P Q)[x := N] \equiv P[x := N] Q[x := N]$.

- Le cas $M \equiv \lambda x.P$ est similaire.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Lemme Réduction du sujet

La β -réduction préserve le type.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow{\beta} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow{\beta} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Démonstration : Par induction sur la définition de
 $M \xrightarrow{\beta} N$.

► $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2$

$\Gamma \vdash (\lambda x.M_1)M_2 : \sigma$ vient de $\Gamma, x : \tau \vdash M_1 : \sigma$ et de
 $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.

D'autre part $N \equiv M_1[x := M_2]$

or d'après le lemme $\Gamma \vdash M_1[x := M_2] : \sigma$.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow{\beta} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Démonstration : Par induction sur la définition de $M \xrightarrow{\beta} N$.

► $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2$

$\Gamma \vdash (\lambda x.M_1)M_2 : \sigma$ vient de $\Gamma, x : \tau \vdash M_1 : \sigma$ et de $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.

D'autre part $N \equiv M_1[x := M_2]$

or d'après le lemme $\Gamma \vdash M_1[x := M_2] : \sigma$.

► $M \equiv M_1M_2$ avec $N \equiv N_1M_2$ et $M_1 \xrightarrow{\beta} N_1$.

$\Gamma \vdash M : \sigma$ vient de $\Gamma \vdash M_1 : \tau \rightarrow \sigma$ et $\Gamma \vdash M_2 : \tau$,
par induction $\Gamma \vdash N_1 : \tau \rightarrow \sigma$ et donc $\Gamma \vdash N_1M_2 : \sigma$.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow{\beta} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.
--

Démonstration : Par induction sur la définition de $M \xrightarrow{\beta} N$.

- ▶ $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2$
 $\Gamma \vdash (\lambda x.M_1)M_2 : \sigma$ vient de $\Gamma, x : \tau \vdash M_1 : \sigma$ et de $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.
 D'autre part $N \equiv M_1[x := M_2]$
 or d'après le lemme $\Gamma \vdash M_1[x := M_2] : \sigma$.
- ▶ $M \equiv M_1M_2$ avec $N \equiv N_1M_2$ et $M_1 \xrightarrow{\beta} N_1$.
 $\Gamma \vdash M : \sigma$ vient de $\Gamma \vdash M_1 : \tau \rightarrow \sigma$ et $\Gamma \vdash M_2 : \tau$,
 par induction $\Gamma \vdash N_1 : \tau \rightarrow \sigma$ et donc $\Gamma \vdash N_1M_2 : \sigma$.
- ▶ Les autres cas sont similaires.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

- ▶ Si un terme est d'un certain type, **il n'en sortira pas** par β -réduction.
- ▶ Si un terme a une forme normale et s'il a un type, alors **sa forme normale a ce type**.

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

[Normalisation forte](#)

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre démonstration de la normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

*La mathématique c'est l'art de donner le même
nom à des choses différentes.*

Henri Poincaré

*La mathématique c'est l'art de donner le même
nom à des choses différentes.*

Henri Poincaré

*La logique c'est l'art de donner des noms
différents à la même chose.*

Haskell Curry et William Alvin Howard

La correspondance de Curry-Howard

$$\begin{array}{l} \text{(Var)} \quad \Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma \\ \text{(Abs)} \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \\ \text{(App)} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash p}{\Gamma, p \vdash q} \\ \Rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q} \end{array}$$

La correspondance de Curry-Howard

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Dans $\Gamma \vdash M : \sigma$,

- ▶ M : est une **annotation** qui est le «**terme de preuve**»,
- ▶ σ peut-être vu comme un **type** ou comme une **proposition**.

$$\begin{array}{c} \Rightarrow E \quad \frac{(p \Rightarrow q), (r \Rightarrow p), r \vdash p \Rightarrow q \quad \mathcal{D}}{(p \Rightarrow q), (r \Rightarrow p), r \vdash q} \\ \hline (p \Rightarrow q), (r \Rightarrow p) \vdash r \Rightarrow q \\ \hline (p \Rightarrow q) \vdash (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q \\ \hline \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q \end{array}$$

où \mathcal{D} est

$$\Rightarrow E \quad \frac{(p \Rightarrow q), (r \Rightarrow p), r \vdash r \Rightarrow p \quad (p \Rightarrow q), (r \Rightarrow p), r \vdash r}{(p \Rightarrow q), (r \Rightarrow p), r \vdash p}$$

La preuve de B annotée

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

$$\Rightarrow E \frac{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash x : p \Rightarrow q \quad \mathcal{D}}{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash x (y z) : q}$$

$$x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p) \vdash \lambda z. x (y z) : r \Rightarrow q$$

$$x : (p \Rightarrow q) \vdash \lambda yz. x (y z) : (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$$

$$\vdash \lambda xyz. x (y z) : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$$

où \mathcal{D} est

$$\Rightarrow E \frac{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash y : r \Rightarrow p \quad x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash z : r}{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash y z : p}$$

La preuve de B annotée

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

$$\Rightarrow E \frac{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash x : p \Rightarrow q \quad \mathcal{D}}{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash x (y z) : q}$$

$$x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p) \vdash \lambda z. x (y z) : r \Rightarrow q$$

$$x : (p \Rightarrow q) \vdash \lambda yz. x (y z) : (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$$

$$\vdash \lambda xyz. x (y z) : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$$

où \mathcal{D} est

$$\Rightarrow E \frac{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash y : r \Rightarrow p \quad x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash z : r}{x : (p \Rightarrow q), y : (r \Rightarrow p), z : r \vdash y z : p}$$

La preuve du lemme B est le terme B !

La preuve

$$\frac{\frac{\frac{(p \Rightarrow p), q \vdash p \Rightarrow p}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow I) \quad \frac{p \vdash p}{\vdash p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow E)$$

peut être réduite

En effet, on fait une introduction immédiatement suivie d'une élimination :

$$\frac{(p \Rightarrow p), q \vdash p \Rightarrow p}{(p \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)$$
$$\frac{(p \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p \quad p \vdash p}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)$$
$$\frac{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p \quad \vdash p \Rightarrow p}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow E)$$

On peut obtenir une preuve de $\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p$ à partir de la preuve de $(p \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p$.

Pour cela, il suffit de remplacer chaque occurrence de l'utilisation de l'hypothèse $(p \Rightarrow p)$ par sa preuve.

[Les types à la Church](#)[Les types à la Curry](#)[La correspondance de Curry-Howard](#)[Normalisation forte](#)[Une autre démonstration de la normalisation forte](#)[Les autres connecteurs](#)

En utilisant cette remarque

$$\frac{\frac{\frac{(p \Rightarrow p), q \vdash p \Rightarrow p}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow I) \quad \frac{p \vdash p}{\vdash p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow E)$$

donne

$$\frac{\frac{q, p \vdash p}{q \vdash p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p} (\Rightarrow I)$$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Donc avec les annotations par les termes de preuve

$$\frac{x : (p \Rightarrow p), y : q \vdash x : p \Rightarrow p}{(Abs)}$$
$$\frac{x : (p \Rightarrow p) \vdash \lambda y. x : q \Rightarrow p \Rightarrow p}{(Abs)} \quad \frac{z : p \vdash z : p}{(Abs)}$$
$$\frac{\vdash \lambda xy. x : (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p \quad \vdash \lambda z. z : p \Rightarrow p}{(App)}$$
$$\vdash (\lambda xy. x) (\lambda z. z) : q \Rightarrow p \Rightarrow p$$

donne

$$\frac{y : q, z : p \vdash z : p}{(Abs)}$$
$$\frac{y : q \vdash \lambda z. z : p \Rightarrow p}{(Abs)}$$
$$\vdash \lambda yz. z : q \Rightarrow p \Rightarrow p$$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Simplification de preuves

Donc avec les annotations par les termes de preuve

$$\frac{x : (p \Rightarrow p), y : q \vdash x : p \Rightarrow p}{(Abs)}$$
$$\frac{x : (p \Rightarrow p) \vdash \lambda y. x : q \Rightarrow p \Rightarrow p}{(Abs)} \quad \frac{z : p \vdash z : p}{(Abs)}$$
$$\frac{\vdash \lambda xy. x : (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p \quad \vdash \lambda z. z : p \Rightarrow p}{(App)}$$
$$\vdash (\lambda xy. x) (\lambda z. z) : q \Rightarrow p \Rightarrow p$$

donne

$$\frac{y : q, z : p \vdash z : p}{(Abs)}$$
$$\frac{y : q \vdash \lambda z. z : p \Rightarrow p}{(Abs)}$$
$$\vdash (\lambda y. x)[x := \lambda z. z] \equiv \lambda yz. z : q \Rightarrow p \Rightarrow p$$

La β -réduction correspond à la simplification des preuves.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}}{\phi, \Gamma \vdash \psi}}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} (\Rightarrow I) \quad \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma \vdash \phi}}{\Gamma \vdash \psi} (\Rightarrow E)}$$

se transforme en

$$\frac{\mathcal{D}''}{\Gamma \vdash \psi}$$

\mathcal{D}'' est la preuve \mathcal{D} dans laquelle toutes les utilisations de l'hypothèse ϕ sont remplacées par la preuve \mathcal{D}' de ϕ .

Simplification de preuves

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}}{\quad}}{x : \phi, \Gamma \vdash M : \psi} \text{ (Abs)} \quad \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma \vdash N : \phi}}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) N : \psi} \text{ (App)}}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) N : \psi}$$

se transforme en

$$\frac{\mathcal{D}''}{\Gamma \vdash M[x := N] : \psi}$$

\mathcal{D}'' (qui se note $M[x := N]$)
est la preuve \mathcal{D} (qui se note M)
dans laquelle toutes les utilisations de l'hypothèse $x : \phi$
sont remplacées par la preuve \mathcal{D}' de ϕ (qui se note N).

La correspondance complète de Curry-Howard

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

[Normalisation forte](#)

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

On obtient le tableau de correspondance :

types
termes
réduction

propositions
preuves
simplification des preuves

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre démonstration de la normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Terminaison de la simplification ?

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Est-ce que le processus de simplification de preuves se
termine ?

Autrement dit est-ce que ce processus est vraiment un
processus de simplification.

Définition : Un terme M est **fortement normalisable** si toute suite de réductions

$M \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\beta} M_n \dots$ est finie.

Théorème : Si $\Gamma \vdash M : \tau$ alors M est **fortement normalisable**.

Normalisation forte (démonstration), 1^{er} lemme

Lambda-calcul simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de Curry-Howard](#)

Normalisation forte

[Une autre démonstration de la normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

Lemme : Si A , B et \vec{C} sont fortement normalisables et $A\vec{B}\vec{C}$ n'est pas fortement normalisable alors il y a un D tel que

1. $A \xrightarrow[\beta]{\gg} \lambda x.D$

2. $D[x := B]\vec{C}$ n'est pas fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 1^{er} lemme

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

[Normalisation forte](#)

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

Démonstration :

Puisque A , B et \vec{C} sont fortement normalisables, la réduction infinie qui part de $AB\vec{C}$ est de la forme

$$AB\vec{C} \xrightarrow{\beta} (\lambda x. D)B_1\vec{C}_1 \xrightarrow{\beta} D[x := B_1]\vec{C}_1 \xrightarrow{\beta} \dots$$

Mézalors le résultat vient immédiatement du fait que

$$D[x := B]\vec{C} \xrightarrow{\beta} D[x := B_1]\vec{C}_1.$$

Normalisation forte (démonstration), 1^{er} lemme

Lambda-calcul simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de Curry-Howard](#)

Normalisation forte

[Une autre démonstration de la normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

Remettons le lemme à l'endroit.

Lemme : Si A , B et \vec{C} sont fortement normalisables et si D est le premier tel que

$$1. A \xrightarrow[\beta]{\twoheadrightarrow} \lambda x. D$$

2. $D[x := B]\vec{C}$ est fortement normalisable.

alors $A B \vec{C}$ est fortement normalisable

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Lemme : Si M et P sont typés
et si M et P sont fortement normalisables,
alors $M[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

Normalisation forte

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

Démonstration :

Par induction sur le triplet $(type(P), h(M), taille(M))$, où

- où $type(P)$ est la complexité du type de P ,
- $h(M)$ (ou hauteur) est la longueur de la plus longue réduction qui commence en M ,
- $taille(M)$ est la taille de M (le nombre de symboles).

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

Normalisation forte

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

- ▶ $M = \lambda y.N$, clairement $h(M) = h(N)$, mais $taille(M) > taille(N)$. On applique l'induction. Donc $N[x := P]$ est fortement normalisable, donc $M[x := P] \equiv \lambda y N[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

[Normalisation forte](#)

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

- ▶ $y\vec{R}$, les réductions ont lieu dans les R_i , donc clairement $h(M) \geq h(R_i)$, et $taille(M) > taille(R_i)$. On applique l'induction à chacun des R_i , on conclut que chaque $R_i[x := P]$ est fortement normalisable, donc $y...R_i[x := P]...$ est fortement normalisable, mais comme

$$y...R_i[x := P]... \equiv (y\vec{R})[x := P].$$

Par conséquent, $(y\vec{R})[x := P]$ est aussi fortement normalisable

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

► $M = (\lambda y.L)Q\vec{R}$

Par induction, $L[x := P]$, $Q[x := P]$ et $\vec{R}[x := P]$ sont fortement normalisables.

Posons $D \equiv L[y := Q]\vec{R}$.

Si on veut utiliser le lemme précédent, il suffit de montrer que $L[x := P][y := Q[x := P]]\vec{R}[x := P] \equiv D[x := P]$

est fortement normalisable .

Or $h(M) > h(D)$ donc par induction $D[x := P]$ est fortement normalisable. On peut donc appliquer le 1^{er} lemme.

Et donc par le lemme, $M[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

Normalisation forte

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

► $M = xL\vec{Q}$

On veut démontrer que $P L[x := P] \vec{Q}[x := P]$ est
fortement normalisable.

Notons que

- $h(M) \geq h(L)$ et $taille(M) > taille(L)$
- et $h(M) \geq h(Q_i)$ et $taille(M) > taille(Q_i)$.

Donc, par induction, $L' \equiv L[x := P]$ et
 $\vec{Q}' \equiv \vec{Q}[x := P]$ sont fortement normalisables.

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

► $M = xL\vec{Q}$ (suite)

Si on veut utiliser le lemme précédent, il suffit de montrer que si P_1 est le premier tel que

$$P \xrightarrow{\beta} \lambda y.P_1$$

alors $M' \equiv P_1[y := L']\vec{Q}'$ est fortement normalisable.

Remarquons

- que $\text{type}(x) = \text{type}(P) = \text{type}(\lambda y.P_1) = \sigma \rightarrow \tau$,
- que $\text{type}(L) = \text{type}(L') = \sigma < \text{type}(P)$.
- et que $\text{type}(P_1[y := L']) = \tau < \text{type}(P)$

Normalisation forte (démonstration), 2^{ème} lemme

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

[Les types à la Church](#)

[Les types à la Curry](#)

[La correspondance de
Curry-Howard](#)

Normalisation forte

[Une autre
démonstration de la
normalisation forte](#)

[Les autres connecteurs](#)

► $M = xL\vec{Q}$ (suite)

On peut appliquer l'hypothèse d'induction et donc $P_1[y := L']$ est fortement normalisable.

Parce que $\text{type}(P_1[y := L']) < \text{type}(P)$, on conclut par induction, que $M' \equiv (z\vec{Q}')[z := P_1[y := L']]$ est fortement normalisable

Ainsi on peut appliquer le deuxième lemme et conclure que $M[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration)

Théorème : Si $\Gamma \vdash M : \tau$ alors M est **fortement normalisable**.

Le théorème est prouvé par induction structurelle sur le terme dont on cherche à prouver la normalisation forte.

- ▶ Le terme est une variable ou une abstraction c'est clair.
- ▶ Le terme est une application $P Q$
alors on utilise la même astuce que dans le lemme en disant que

$$P Q \equiv (zQ)[z := P]$$

ça devient évident par le 2^{ème} lemme dont les hypothèses proviennent de l'induction structurelle.

En effet si Q est fortement normalisable alors $z Q$ est fortement normalisable.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre démonstration de la normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

**Une autre
démonstration de la
normalisation forte**

Les autres connecteurs

Soit \mathcal{R}^σ des ensembles de termes

$\mathcal{R}^\circ = \mathcal{SN} = \{\text{l'ensemble de fortement normalisables}\}$

$\mathcal{R}^{\sigma \rightarrow \tau} = \{M \mid (\forall N \in \mathcal{R}^\sigma) M N \in \mathcal{R}^\tau\}$

Les réductibles sont fortement normalisables

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Lemme : Pour tout σ

- ▶ pour tous $M_1 \in \mathcal{SN}$, ..., $M_p \in \mathcal{SN}$ on a
 $\times M_1 \dots M_p \in \mathcal{R}^\sigma$,
- ▶ $\mathcal{R}^\sigma \subseteq \mathcal{SN}$.

Démonstration

Par induction sur les types.

- ▶ Si le type est o , alors clairement
 $\times M_1 \dots M_p \in \mathcal{R}^o = \mathcal{SN}$ et $\mathcal{R}^o \subseteq \mathcal{SN}$.

- ▶ Si le type est $\sigma \rightarrow \tau$, alors
 - ▶ Pour montrer que $x M_1 \dots M_p \in \mathcal{R}^{\sigma \rightarrow \tau}$, il faut montrer que pour tout $N \in \mathcal{R}^\sigma$, on a $x M_1 \dots M_p N \in \mathcal{R}^\tau$;
or par induction $\mathcal{R}^\sigma \subseteq \mathcal{SN}$
et donc aussi par induction $x M_1 \dots M_p N \in \mathcal{R}^\tau$;
 - ▶ Soit $M \in \mathcal{R}^{\sigma \rightarrow \tau}$, on sait que pour tout $N \in \mathcal{R}^\sigma$
on a $M N \in \mathcal{R}^\tau \subseteq \mathcal{SN}$
on sait que $x \in \mathcal{R}^\sigma$,
donc en particulier $M x \in \mathcal{R}^\tau \subseteq \mathcal{SN}$,
et donc $M \in \mathcal{SN}$.

Si $M[x := P] \in \mathcal{R}^\sigma$ et si $P \in \mathcal{R}^\tau$ alors
 $(\lambda x.M) P \in \mathcal{R}^\sigma$.

Démonstration

On voit que si $\sigma \equiv \sigma_n \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_0$, alors

$$M \in \mathcal{R}^\sigma \Leftrightarrow \forall N_n \in \mathcal{R}^{\sigma_n} \dots \forall N_1 \in \mathcal{R}^{\sigma_1} M N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}.$$

Il faut donc montrer que $(\lambda x.M) P N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}$
sachant que $M[x := P] N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}$ et que
 $N_n \in \mathcal{R}^{\sigma_n} \dots N_1 \in \mathcal{R}^{\sigma_1}, P : \mathcal{R}^\tau$.

On raisonne par induction sur

$red(P) + red(M[x := P] N_n \dots N_1)$.

où $red(Q)$ est la somme des longueurs de toutes les réductions

qui commencent en Q .

Il faut montrer que toutes les réductions de $(\lambda x.M) P N_n \dots N_1$ sont fortement normalisables.

- Si on contracte le redex $(\lambda x.M) P$ alors $M[x := P] N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}$ par hypothèse.
- Si on contracte en M' un redex dans M , on sait que $M[x := P] N_n \dots N_1 \xrightarrow{\beta} M'[x := P] N_n \dots N_1$

donc $M'[x := P] N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}$ et de plus $red(M'[x := P] N_n \dots N_1) < red(M[x := P] N_n \dots N_1)$
donc par induction $(\lambda x.M') P N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}$

- Même démonstration si on contracte un redex dans N_j .

- Si on contracte le redex P en P' , alors

$red(P') < red(P)$.

$$M[x := P] N_n \dots N_1 \xrightarrow{\beta} M[x := P'] N_n \dots N_1$$

donc $M[x := P'] N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}$,

et $red(M[x := P'] N_n \dots N_1) \leq red(M[x := P] N_n \dots N_1)$

par induction $(\lambda x.M) P' N_n \dots N_1 \in \mathcal{SN}$.

Si $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash M : \sigma$
et si $N_i \in \mathcal{R}^{\sigma_i}$
alors $M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] \in \mathcal{R}^\sigma$.

Démonstration

Par induction sur M .

- Si $M = y$ avec $y \neq x_i$, alors

$M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] = y \in \mathcal{R}^\sigma$ par le lemme.

- Si $M = x_i$ alors $M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] = N_i \in \mathcal{R}^\sigma$
par hypothèse.

- Si $M = \lambda x.N$ et $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau$
alors $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n, x : \sigma \vdash M : \tau$.

Il faut montrer que pour tout $N \in \mathcal{R}^\sigma$, on a
 $(\lambda x.M)[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] N \in \mathcal{R}^\tau$.

D'après le lemme de saturation il faut montrer que
 $M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n; x := N] N \in \mathcal{R}^\tau$.

Ce qui vient par hypothèse d'induction.

• Si $M = P Q$ alors

▶ $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash M : \tau \rightarrow \sigma$

▶ et $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash N : \tau$,

par induction

▶ $M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] \in \mathcal{R}^{\tau \rightarrow \sigma}$

▶ et $N[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] \in \mathcal{R}^{\tau}$.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

• Si $M = P Q$ alors

▶ $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash M : \tau \rightarrow \sigma$

▶ et $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash N : \tau$,

par induction

▶ $M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] \in \mathcal{R}^{\tau \rightarrow \sigma}$

▶ et $N[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] \in \mathcal{R}^{\tau}$.

Donc

$M N[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n]$

$= M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] N[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n]$
 $\in \mathcal{R}^{\sigma}$.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Théorème de normalisation forte

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les typables sont réductibles.

Si $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash M : \sigma$ alors $M \in \mathcal{R}^\sigma$.

On applique le lemme d'adéquation avec $N_i = x_i$ et on obtient $M \in \mathcal{R}^\sigma$.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Théorème de normalisation forte

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les typables sont réductibles.

Si $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash M : \sigma$ alors $M \in \mathcal{R}^\sigma$.

On applique le lemme d'adéquation avec $N_i = x_i$ et on obtient $M \in \mathcal{R}^\sigma$.

Les typables sont fortement normalisables.

Si $x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n \vdash M : \sigma$ alors $M \in \mathcal{SN}$.

On a $M \in \mathcal{SN}$ puisque $\mathcal{R}^\sigma \subseteq \mathcal{SN}$.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre démonstration de la normalisation forte

Les autres connecteurs

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Le & et le produit cartésien

Lambda-calcul
simplement typé

Pierre Lescanne

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Le $\&$ s'interprète bien calculatoirement en ajoutant des opérateurs de **produit cartésien**.

Le constructeur de paires : $\langle -, - \rangle$,

Les destructeurs ou projections : π^1 et π^2 .

Les règles de typage

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi^1 M : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi^2 M : \tau}$$
$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}$$

correspondent clairement

- ▶ aux deux règles d'éliminations du &
- ▶ et à la règle d'introduction du &.

Le & et le produit cartésien

On a deux règles de réduction

$$\pi^1 \langle M, N \rangle \rightarrow M$$

$$\pi^2 \langle M, N \rangle \rightarrow N$$

qui correspondent à la simplification de preuve :

$$\frac{\mathcal{D}}{\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}} \rightarrow \frac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash M : \sigma}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi^1 \langle M, N \rangle : \sigma}$$

et la simplification symétrique.

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

Le \vee s'interprète comme la structure de données **somme**.

Les deux constructeurs : in_1 et in_2 ,

Le destructeur ou discriminateur : $case\ of\ in\ |$.
un peu le **match** de CAML.

Les règles de typage sont

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \text{in}_1 M : \sigma \vee \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \text{in}_2 M : \sigma \vee \tau}$$
$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho \quad \Gamma, x : \tau \vdash Q : \rho}{\Gamma \vdash \text{case } M \text{ of } x \text{ in } P \mid Q : \rho}$$

Elles correspondent

- ▶ aux règles d'introduction du \vee
- ▶ et à la règle d'élimination du \vee .

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs

On a les règles de réduction

$$\text{case } (\text{in}_1 M) \text{ of } x \text{ in } P \mid Q \rightarrow P[x := M]$$

$$\text{case } (\text{in}_2 M) \text{ of } x \text{ in } P \mid Q \rightarrow Q[x := M]$$

qui correspond à la simplification de preuve.

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'}{\Gamma \vdash M : s} \quad \frac{\mathcal{D}}{\Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho} \quad \frac{\mathcal{D}''}{\Gamma, x : \tau \vdash Q : \rho}}{\Gamma \vdash \text{in}_1 M : s \vee \tau} \rightarrow \frac{\mathcal{D}\{\mathcal{D}'/\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma\}}{\Gamma \vdash P : \rho}}{\text{case } M \text{ of } x \text{ in } P \mid Q : \rho}$$

Les types à la Church

Les types à la Curry

La correspondance de
Curry-Howard

Normalisation forte

Une autre
démonstration de la
normalisation forte

Les autres connecteurs