Licence d'Informatique Fondamentale

Complétude du calcul propositionnel intuitionniste

Le but de ce qui suit est de montrer la complétude du calcul propositionnel intuitionniste vis-à-vis des modèles de Kripke. Sans beaucoup nuire à la généralité, on se restreindra à un calcul ne contenant que les connecteurs $\vee$ et $\rightarrow$. Auparavant on montre que l'on peut indifféremment considérer les modèles finis ou les modèles finis et/ou infinis.

Partie 1 : Modèles finis ou infinis

Dans cette partie on montre que pour le calcul propositionnel intuitionniste, la validité dans les modèles de Kripke infinis se ramène à la validité dans les modèles de Kripke finis.

L'ensemble des propositions est noté PROP et l'ensemble des variables propositionnelles est noté *Var*. Un ensemble Γ de propositions est *stable par sous terme* (ou sous-formule) si quand Γ contient φ il contient toutes les propositions qui sont des sous-termes de φ.

Un modèle de Kripke du calcul propositionnel est un triplet $\mathcal{K} = (U, \leq, \mathcal{I})$, où U est un ensemble fini ou infini, $\leq$ est un ordre sur U et $\mathcal{I} : Var \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ et tel que pour chaque variable propositionnelle $p \in Var$, $\mathcal{I}(p)$ est un sous-ensemble dirigé de U, c'est-à-dire tel que $u \in \mathcal{I}(p)$ et $u \leq v$ impliquent $v \in \mathcal{I}(p)$. On définit une relation $\Vdash_{\mathcal{K}}$ (ou plus simplement $\Vdash$) sur $U \times \mathsf{PROP}$ par induction sur la structure des propositions :

- si la proposition est une variable propositionnelle p, alors $u \Vdash p$ signifie que $u \in \mathcal{I}(p)$,
- si la proposition est de la forme $\varphi \vee \psi$, alors $u \Vdash \varphi \vee \psi$, signifie que $u \Vdash \varphi$ ou $u \Vdash \psi$,
- si la proposition est de la forme $\varphi \rightarrow \psi$, alors $u \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ signifie que pour tout $v \geq u$ si $v \Vdash \varphi$ alors $v \Vdash \psi$.

φ est valide dans $\mathcal{K}$, ce qui s'écrit $\mathcal{K} \models \varphi$, ssi pour tout $u \in U$, $u \Vdash \varphi$ et φ est valide, ce qui s'écrit $\models \varphi$, ssi pour tout modèle $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \models \varphi$.

Soient $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke et Γ un ensemble fini de propositions stable par sous-terme. Nous associons à $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke fini $\mathcal{K}_\Gamma = (U_\Gamma, \leq_\Gamma, \mathcal{I}_\Gamma)$ comme suit. On définit, pour chaque $u \in U$, $[u] = \{\varphi \in \Gamma \mid u \Vdash \varphi\}$ et $U_\Gamma = \{[u] \mid u \in U\}$. L'ordre $\leq_\Gamma$ est l'ordre d'inclusion des sous-ensembles de PROP. On écrit $\Vdash_\Gamma$ au lieu de $\Vdash_{\mathcal{K}_\Gamma}$.

Par définition $\mathcal{I}_\Gamma(p) = \{[u] \mid p \in [u]\}$. On dit que $\mathcal{K}_\Gamma$ est obtenu par *filtration* à partir de $\mathcal{K}$.

1. Montrez que U_Γ est fini et que $\mathcal{K}_\Gamma$ satisfait les critères de définition d'un modèle de Kripke (c'est-à-dire que $\mathcal{I}_\Gamma$ est dirigé pour $\leq_\Gamma$ qui est aussi $\subseteq$).
2. Montrez que si $\varphi \in \Gamma$ les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $[u] \Vdash_\Gamma \varphi$
   (ii) $u \Vdash \varphi$ (autrement dit dans ce cas $\varphi \in [u]$).
3. Montrez que $\models \varphi$ si et seulement si $\mathcal{K} \models \varphi$ pour tous les modèles $\mathcal{K}$ finis.

Partie 2 : Ensembles premiers

Dans la suite, on considère les modèles de Kripke finis ou infinis.

Un ensemble de propositions Δ est *premier* s'il satisfait les deux conditions :

a. Δ est clos par $\vdash$,

b. quand $\psi \vee \chi \in \Delta$ alors ou bien $\psi \in \Delta$, ou bien $\chi \in \Delta$.

Soient Γ un ensemble de propositions et φ une proposition telle $\Gamma \nvdash \varphi$, on veut construire un ensemble Γ' premier qui contienne Γ et tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$. Pour cela, on ordonne les propositions disjonctives en une suite $(\psi_1 \vee \chi_1, \ldots, \psi_n \vee \chi_n, \ldots)$ et l'on construit la suite Γ_k ainsi. Γ_0 est Γ. Supposons construit Γ_k avec $\Gamma_k \nvdash \phi$ et considérons la première proposition de la suite ci-dessus telle que $\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$ et $\Gamma_k \nvdash \psi_{n_k}$ et $\Gamma_k \nvdash \chi_{n_k}$.

1. Expliquez pourquoi une telle proposition $\psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$ existe toujours.
2. Montrez que l'on n'a pas à la fois $\Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \varphi$ et $\Gamma_k, \chi_{n_k} \vdash \varphi$. Ainsi on définit

$$\Gamma_{k+1} := \begin{cases} \Gamma_k \cup \{\psi_{n_k}\} \text{ si } \Gamma_k, \psi_{n_k} \nvdash \varphi \\ \Gamma_k \cup \{\chi_{n_k}\} \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

3. Soit $\Gamma' = \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$. Montrez que $\Gamma' \nvdash \varphi$.
4. Montrez que Γ' est premier.

Partie 3 :Théorème de complétude

Dans cette partie on veut montrer que si $\Gamma \nvdash \varphi$ alors il existe un modèle de Kripke $\mathcal{K} = (U, \leq, \mathcal{I})$ et un monde u minimum dans U telle que $u \Vdash \Gamma$ et $u \nVdash \varphi$. On construit tout d'abord un ensemble premier Γ' tel que $\Gamma' \supseteq \Gamma$ et $\Gamma' \nvdash \varphi$. U est l'ensemble des suites finies d'entiers ordonnées par l'ordre préfixe (ε est la suite vide). Donc un monde de U est un suite finie d'entiers $\alpha \equiv a_1 \ldots a_p$.

1. On construit le modèle $\mathcal{K}$ et des ensembles $\Gamma(\alpha)$ associés à chaque suite d'entiers α (c'est-à-dire à chaque monde de U).

- cas ε, $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma'$.
- cas αi. Soit une suite $((\sigma_0, \tau_0), (\sigma_1, \tau_1), \ldots, (\sigma_n, \tau_n), \ldots,)$ énumérant tous les (σ_i, τ_i) tels que $\Gamma(\alpha), \sigma_i \nvdash \tau_i$. On peut construire un ensemble premier $\Gamma(\alpha i)$ tel que $\sigma_i \in \Gamma(\alpha i)$ et $\Gamma(\alpha i) \nvdash \tau_i$. Pourquoi ?

Par définition, $\alpha \in \mathcal{I}(p)$ si et seulement si $p \in \Gamma(\alpha)$.

2. Supposant que pour tout β, $\beta \Vdash \psi_1$ si et seulement si $\Gamma(\beta) \vdash \psi_1$ et $\beta \Vdash \psi_2$ si et seulement si $\Gamma(\beta) \vdash \psi_2$, montrez que $\alpha \Vdash \psi_1 \to \psi_2$ implique $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_1 \to \psi_2$.
3. Montrez que $\alpha \Vdash \psi$ si et seulement si $\Gamma(\alpha) \vdash \psi$.
4. Montrez que $\varepsilon \Vdash \psi$ (pour chaque $\psi \in \Gamma$) et que $\varepsilon \nVdash \varphi$.
5. Montrez que si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.