S. Boldo et S. Le Roux Le 24 novembre 2004

Logique – TD n°8

Logique combinatoire

Rappels de cours : ***Logique combinatoire***

Les termes de la logique combinatoire, ou CL-termes, sont définis par la grammaire algébrique suivante :

$$M, N ::= x \mid MN \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{S} \qquad \text{où } x \in \mathcal{U} \text{ est une variable.}$$

Il y a donc des variables, deux constantes **S** et **K**, et une opération binaire, l'application.

Sur les CL-termes, on définit comme suit la CL-réduction $\overset{\mathrm{CL}}{\rightarrow}$:

$$\mathbf{S}xyz \overset{\mathrm{CL}}{\rightarrow} xz(yz) \qquad \mathbf{K}xy \overset{\mathrm{CL}}{\rightarrow} x$$

On note **I** le terme **SKK**. On remarque que $\mathbf{I}x \overset{\mathrm{CL}}{\twoheadrightarrow} x$.

On interprète les CL-termes vers les λ-termes et vice-versa par :

$$\begin{array}{rcl} [\![MN]\!]_\lambda & = & [\![M]\!]_\lambda [\![N]\!]_\lambda \\ [\![x]\!]_\lambda & = & x \\ [\![\mathbf{K}]\!]_\lambda & = & \lambda xy.x \\ [\![\mathbf{S}]\!]_\lambda & = & \lambda xyz.xz(yz) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [\![MN]\!]_{\mathrm{CL}} & = & [\![M]\!]_{\mathrm{CL}} [\![N]\!]_{\mathrm{CL}} \\ [\![x]\!]_{\mathrm{CL}} & = & x \\ [\![\lambda x.M]\!]_{\mathrm{CL}} & = & [x].[\![M]\!]_{\mathrm{CL}} \end{array}$$

où $[x].$ est un opérateur d'abstraction défini par : $[x].M = \mathbf{K}M$ si x n'est pas une variable de M et, sinon, $[x].(MN) = \mathbf{S}([x].M)([x].N)$ et $[x].x = \mathbf{I}$.

Exercice 1 : ***Logique combinatoire***

1°) Montrer que **SK** est en forme CL-normale et que $[\![\mathbf{SK}]\!]_\lambda$ n'est pas en forme β-normale.
2°) Montrer que $\mathsf{SK} =_\beta \mathsf{KI}$ et que $\mathbf{SK} \neq_{\mathrm{CL}} \mathbf{KI}$.
3°) Soient $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{SII}$ et $\mathbf{P} = \mathbf{S}(\mathbf{K}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{K}\boldsymbol{\omega})$. Montrer que $\mathbf{P}$ est en forme CL-normale, et que $[\![\mathbf{P}]\!]_\lambda$ n'a pas de forme β-normale.
4°) On a en λ-calcul la réduction suivante : $\lambda x.\mathsf{II} \overset{\beta}{\rightarrow} \lambda x.\mathsf{I}$. Montrer qu'il est impossible que $[\![\lambda x.\mathsf{II}]\!]_{\mathrm{CL}} \overset{\mathrm{CL}}{\twoheadrightarrow} [\![\lambda x.\mathsf{I}]\!]_{\mathrm{CL}}$.
5°) Comparer le graphe de Ω selon la β-réduction avec le graphe de $[\![\Omega]\!]_{\mathrm{CL}}$ selon la CL-réduction.

Exercice 2 : ***Généalogie (science de trouver des ancêtres communs)***

On notera $M \uparrow^\beta N$ s'il existe L tel que $L \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$ et $L \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.
1°) Montrer que si $M \uparrow^\beta P$ et que M a une forme β-normale N, alors P a pour forme β-normale également N.
2°) Montrer les affirmations suivantes :
- $(\lambda x.ax)b \uparrow^\beta (\lambda y.yb)a$
- $(\lambda x.xc)c \uparrow^\beta (\lambda x.xx)c$
- $(\lambda x.bx)c \uparrow^\beta (\lambda x.x)bc$
- $(\lambda x.bx(bx))c \uparrow^\beta (\lambda x.xx)(bc)$
- $(\lambda x.bx)c \uparrow^\beta (\lambda x.x)(bc)$
- $\mathsf{K}\Omega\mathsf{I} \not\uparrow^\beta \mathsf{KI}\Omega$