

Logique – TD n°3

Dédution naturelle

Exercice 1 : Logique minimale

Finir le TD précédent...

Rappels de cours : Dédution naturelle

Les formules de déduction naturelle (en abrégé, DN) sont construites avec le connecteur nulle \perp et les connecteurs binaires $\rightarrow, \vee, \wedge$. Ses jugements sont de la forme $\Gamma \vdash \varphi$, où φ est une formule et Γ , appelé *l'antécédent*, un ensemble de formules.

Il n'y a en déduction naturelle qu'un axiome : $\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}$ (hyp)

et, pour chaque connecteur, il y a des règles d'introduction et d'élimination :

$$\begin{array}{ccc} \frac{}{\Gamma \vdash \perp} \text{ (e.f.q.s.)} & \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} (\rightarrow\text{-I}) & \frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta} (\rightarrow\text{-E}) \\ \\ \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta} (\wedge\text{-I}) & \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha} (\wedge\text{-E-1}) & \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta} (\wedge\text{-E-2}) \\ \\ \frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} (\vee\text{-E}) & \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} (\vee\text{-I-1}) & \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} (\vee\text{-I-2}) \end{array}$$

Exercice 2 : La déduction naturelle, c'est plus facile que Hilbert

Montrer en déduction naturelle les assertions suivantes :

- **I** : $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$
- **K** : $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- **S** : $\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
- **B** : $\vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
- $\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta \rightarrow \delta$
- $\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$
- $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma)$
- $\vdash \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Exercice 3 : Affaiblissement

Montrer que la règle suivante, dite d'*affaiblissement*, est correcte en déduction naturelle :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi} \text{ (aff.)}$$

Exercice 4 : Quelques démonstrations en déduction naturelle

- $\vdash p \wedge (q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- $\vdash p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\vdash (p \vee \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- Montrer que la règle suivante est correcte en DN : $\frac{\Gamma \vdash \neg q \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p}$

Rappels de cours : Logique classique

On ajoute à la déduction naturelle la règle de *reductio ad absurdum* :

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ (r.a.a.)}$$

Exercice 5 : Déduction naturelle classique

Montrer en déduction naturelle les assertions suivantes :

$$\vdash \neg\neg p \rightarrow p$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p} \perp E$$

$$\frac{\Gamma, \neg p \vdash p}{\Gamma \vdash p}$$

$$\vdash p \vee \neg p$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg q \rightarrow \neg p}{\Gamma \vdash p \rightarrow q} \text{ contrap}$$

$$\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$$

$$\frac{\Gamma, \neg p \vee \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \wedge q) \vdash r}$$

$$\frac{\Gamma, \neg p, \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \vee q) \vdash r}$$

$$\frac{\Gamma, p, \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \rightarrow q) \vdash r}$$